BLK-Modellversuch SINUS Rheinland-Pfalz

Netzwerkschule

Cusanus-Gymnasium Wittlich

Fachbereich Mathematik

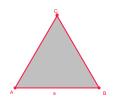
Kurfürstenstrasse 14 54516 Wittlich

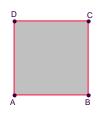


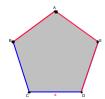
Eine Lerneinheit

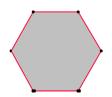
über

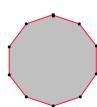
regelmäßige Vielecke





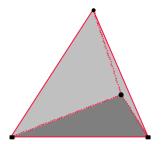




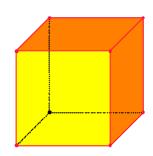


und

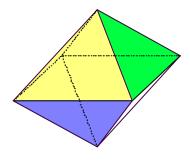
vollkommen regelmäßige (Platonische) Körper



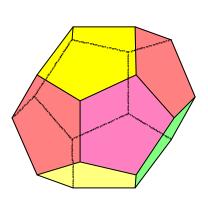
Tetraeder (griech.: tetra vier)



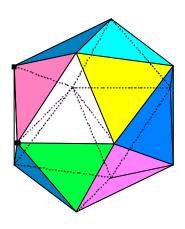
Hexaeder (Würfel) (griech.: hexa sechs)



Oktaeder (griech.: okta acht)



Dodekaeder (griech.: dodeka zwölf)



Ikosaeder (griech.: eikosi zwanzig)

Hinweise zur Arbeit mit dieser Lerneinheit:

- Du sollst die einzelnen Aufgaben alleine oder in Gruppenarbeit lösen. In der Gruppe macht es mehr Spaß und zusammen hat man auch mehr Ideen.
- 2) Es ist nicht notwendig alle Aufgaben zu bearbeiten.
- 3) Fragen zu stellen muss man lernen. Am Anfang werden dir vielleicht nicht sehr viele Fragen einfallen. Lasse dich nicht entmutigen! Du wirst sehen, dass du mit der Zeit immer routinierter im Fragen wirst. Damit wächst auch die Neugier und die Lust die Fragen zu beantworten.

Wenn du alleine nicht mehr weiter kommst, versuche in einer Gruppe mit anderen gemeinsame Fragen und Antworten zu finden.



Merke:

Es gibt keine "dummen" Fragen.

Es gibt nur solche, die wir leicht beantworten können, aber auch solche, die wir mit unserem Wissen nicht beantworten können.

Dazwischen gibt es viele, die wir mit etwas Anstrengung beantworten können.

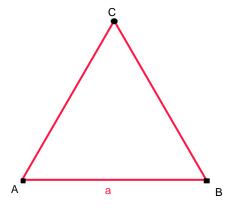
I) Regelmäßige Vielecke:

Definition: Ein regelmäßiges Vieleck ist ein n-Eck (n>2),

dessen Seiten alle gleich lang sind und dessen Eckpunkte alle auf einem gemeinsamen Umkreis

liegen.

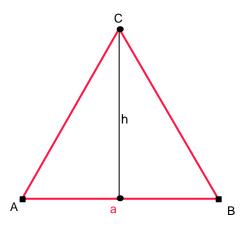
1.1)Das gleichseitige Dreieck



Aufgabe1.1.1: Formuliere mindestens 5 Fragen zum gleichseitigen Dreieck, die aus mathematischer Sicht von Interesse sind:



1.		
2.		
3.		
3.		
4.		
5.		



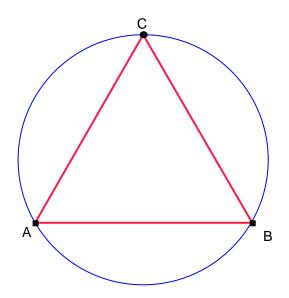
Aufgabe 1.1.2: Zeige, dass für die Höhe $h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ gilt



Aufgabe 1.1.3: Zeige, dass der Flächeninhalt $A = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ ist



Aufgabe 1.1.4: Konstruiere den Innenkreis des gleichseitigen Dreiecks.



Zusammenfassung:

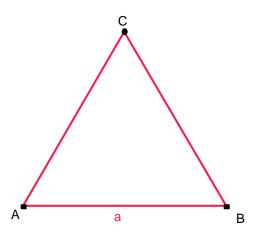
Stelle in der folgenden Tabelle alle wichtigen Eigenschaften des gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge a zusammen:

Winkel zwischen benachbarten Seiten	Flächen- inhalt	Umkreis- radius	Inkreis- radius	Umfang	Höhe
α=	A=	R=	r=	U=	h=

Zusatzaufgabe 1.1.5 (etwas schwieriger)

Die drei Seitenhalbierenden in einem gleichseitigen Dreieck schneiden sich in einem Punkt S.

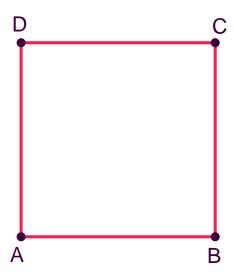
Zeichne die drei Seitenhalbierenden mit diesem Schnittpunkt S in das gleichseitige Dreieck ein:



Der Punkt S teilt die Seitenhalbierenden jeweils in zwei Teile. Miß die beiden Teile und formuliere eine Vermutung:

Vermutung: Das große Teil ist so groß wie das kleine Teil.
Oder anders ausgedrückt: Der Punkt S teilt die Seitenhalbierenden im Verhältnis : vom Eckpunkt aus gesehen.
Versuche deine Vermutung zu beweisen. (Für Spezialisten!) Hinweis: In der Figur lassen sich Strahlensatzfiguren entdecken. (Evtl. musst du noch Hilfslinien einzeichnen!) Die Anwendung der Strahlensätze bringt dir den Beweis!

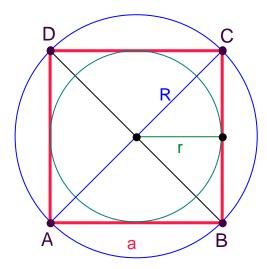
1.2) Das Quadrat



Aufgabe 1.2.1: Formuliere mindestens 5 Fragen zum Quadrat, die aus mathematischer Sicht von Interesse sind:

1.			
2.			
3.			
4.			
5.			

Aufgabe 1.2.2 Konstruiere den Umkreis und den Innenkreis des Quadrats und berechne die Radien R und r



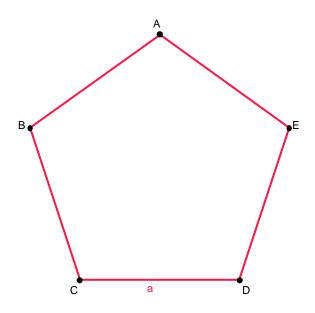
Nebenrechnungen:

Zusammenfassung:

Stelle in der folgenden Tabelle alle wichtigen Eigenschaften des Quadrats mit der Seitenlänge a zusammen:

Winkel zwischen benachbarten Seiten	Flächen- inhalt	Umkreis- radius	Innen- kreis- radius	Umfang	Höhe	Diagonale
α=	A=	R=	r=	U=	h=	d=

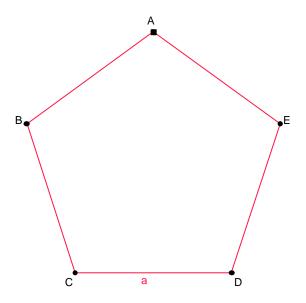
1.3) Das regelmäßige Fünfeck (Pentagon)



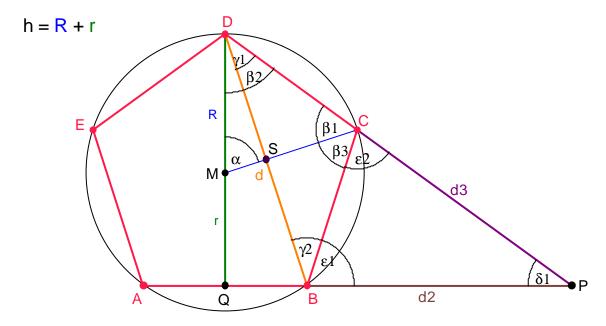
Aufgabe 1.3.1: Formuliere mindestens 5 Fragen zum Pentagon, die aus mathematischer Sicht von Interesse sind:

1.		
2.		
3.		
4.		
5.		
6.		

Aufgabe 1.3.2 Konstruiere den Umkreis und den Innenkreis des Pentagons



Da die Berechnungen am Pentagon nicht so ganz leicht sind, betrachte die folgende Figur und fülle die untenstehende Tabelle aus:



Aufgabe 1.3.3 Fülle die Tabelle aus, so weit du kannst

Behauptung	Begründung
β1=	
β2=	
β3=	
γ1=	
α=	
γ2=	
ε1=	
ε2=	
δ1=	
d3=d2	
d=d2	
$d^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$	
$(d+a)^2 = \left(d+\frac{a}{2}\right)^2 + h^2$	

Nicht ganz einfach!

Zeige, dass aus den beiden letzten Gleichungen folgt

Diagonale im Pentagon:

$$d = \frac{a}{2} \cdot (1 + \sqrt{5})$$

Höhe des Pentagons:

$$h = \frac{a}{2}\sqrt{2\sqrt{5} + 5}$$

Nebenrechnung:	

Behauptung	Begründung
2	Degranding
$R^2 = (h - R)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$	
aus obiger Gleichung folgt:	
$R = \frac{h}{2} + \frac{a^2}{8h}$	
und damit	
$R = \frac{a}{4}\sqrt{2\sqrt{5} + 5} + \frac{a^2}{4a\sqrt{2\sqrt{5} + 5}}$	
Die let te Oleich en liiüt eich	
Die letzte Gleichung läßt sich vereinfachen zu	
$R = \frac{a}{10}\sqrt{10\sqrt{5} + 50}$	
Aus r=h-R ergibt sich dann	
$r=\frac{a}{10}\sqrt{10\sqrt{5}+25}$	
Mit r lässt sich der Flächeninhalt des Pentagons leicht berechnen:	
$A = \frac{1}{20} \sqrt{25 + 10\sqrt{5}} \cdot a^2$	

Aufgabe 1.3.4 Zeichne mit Geodreieck und Zirkel ein Pentagon mit der Seitenlänge a=4cm:				
Zusammenfassung: Stelle in der folgenden Tabelle alle wichtige der Seitenlänge a zusammen:	en Eigenschaften des Pentagons mit			
Winkel zwischen benachbarten Seiten	α=			
Flächeninhalt	A=			
Umkreisradius	R=			
Innenkreisradius	 r=			

d=

U=

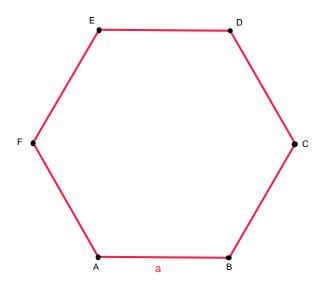
h=

Länge einer Diagonalen

Umfang

Höhe

1.4 Das regelmäßige Sechseck



Aufgabe 1.4.1: Formuliere mindestens 5 Fragen zum regelmäßigen Sechseck , die aus mathematischer Sicht von Interesse sind:

1.			
2.			
3.			
4.			
5.			
6.			

Aufgabe 1.4.2

Zusammenfassung:
Stelle in der folgenden Tabelle alle wichtigen Eigenschaften des regelmäßigen Sechsecks mit der Seitenlänge a zusammen:

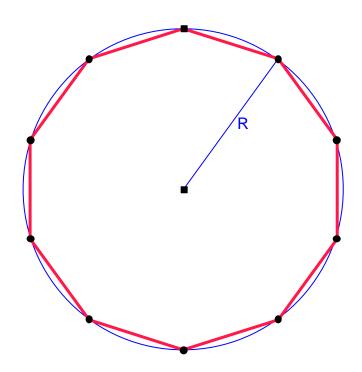
Winkel zwischen benachbarten Seiten	α=
Flächeninhalt	A=
Umkreisradius	R=
Innenkreisradius	r=
Länge einer Diagonalen	d=
Umfang	U=
Höhe	h=

Raum für Nebenrechnungen:	

Aufgabe 1.4.3 Sechseck mit a=	Konstruiere nur mit Zirkel und Lineal ein regelmäßiges 4cm

1.5 Das regelmäßige Zehneck

Eine Besonderheit des regelmäßigen Zehnecks ist, dass es wie das Sechseck nur mit Zirkel und Lineal konstruiert werden kann.

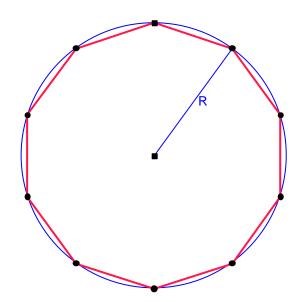


Aufgabe 1.5.1: Formuliere mindestens 5 Fragen zum regelmäßigen Zehneck:

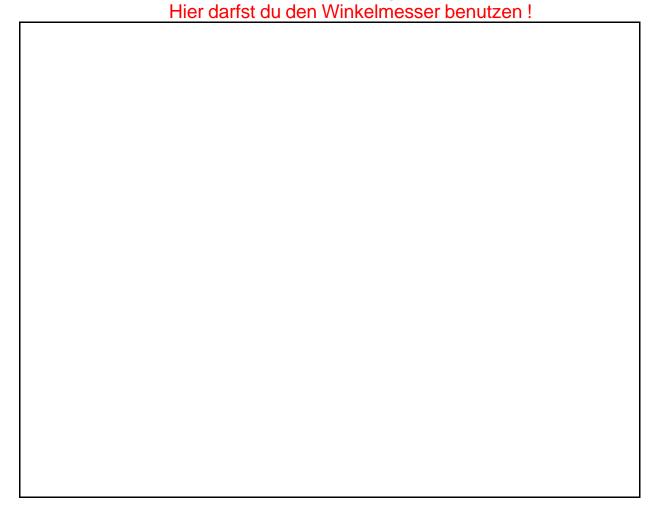
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			

Aufgabe 1.5.2: Jedes regelmäßige Zehneck besitzt auch einen Innenkreis.

Konstruiere den Innenkreis im folgenden Zehneck.



Aufgabe 1.5.3: Versuche mit dem Geodreieck ein regelmäßiges Zehneck mit der Seitenlänge a=4cm zu zeichnen.

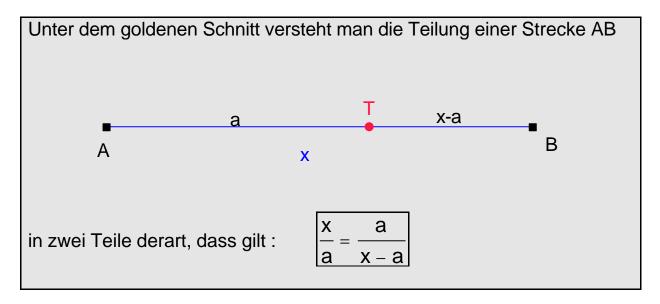


Aufgabe 1.5.4 :	Formuliere noch weitere Fragen zum Zehneck, die aus
	mathematischer Sicht von Interesse sind. (Auch wenn du sie nicht sofort beantworten kannst!)

1.	
2.	
3.	
4.	
5.	

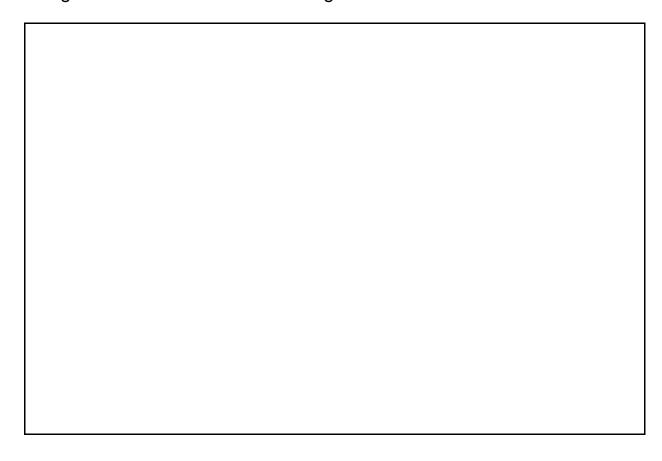
Bei der Berechnung und bei der Konstruktion des Zehnecks spielt der GOLDENE SCHNITT

eine große Rolle.



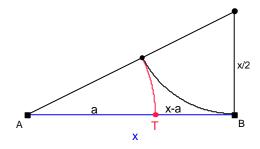
Löst man die Gleichung nach a auf, so erhält man $a = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}x$

Aufgabe 1.5.5: Löse die Gleichung nach a auf!



Es gibt nun eine sehr einfache Konstruktionen mit der man eine Strecke x golden schneiden kann:

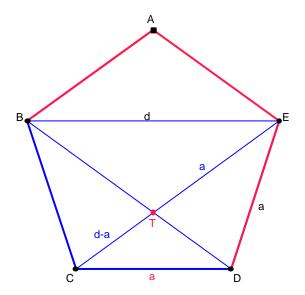
Konstruktion:



Aufgabe 1.5.6: Zeige, dass T die Strecke x "golden" teilt



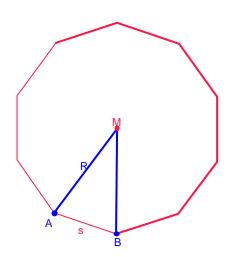
Der goldene Schnitt begegnet einem auch im regelmäßigen Fünfeck: Die beiden Diagonalen \overline{CE} und \overline{DB} schneiden sich in einem Punkt T, der die Diagonalen "golden" schneidet.

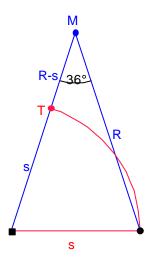


Aufgabe 1.5.7: Zeige, dass die Bedingung des Goldenen Schnitts erfüllt sind.

Hinweis: Strahlensatzfigur suchen!

Auch beim regelmäßigen Zehneck stößt man auf den Goldenen Schnitt:

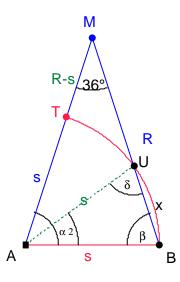




Teilt man den Radius R mit dem Goldenen Schnitt, dann ist die Seitenlänge s des Zehnecks gerade eine Teilstrecke dieses Schnitts.

Aufgabe 1.5.8:

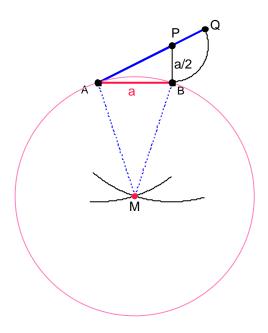
Zum Beweis fülle die unten stehende Tabelle aus!



Nachweis, dass T den Radius R des Umkreises golden schneidet:

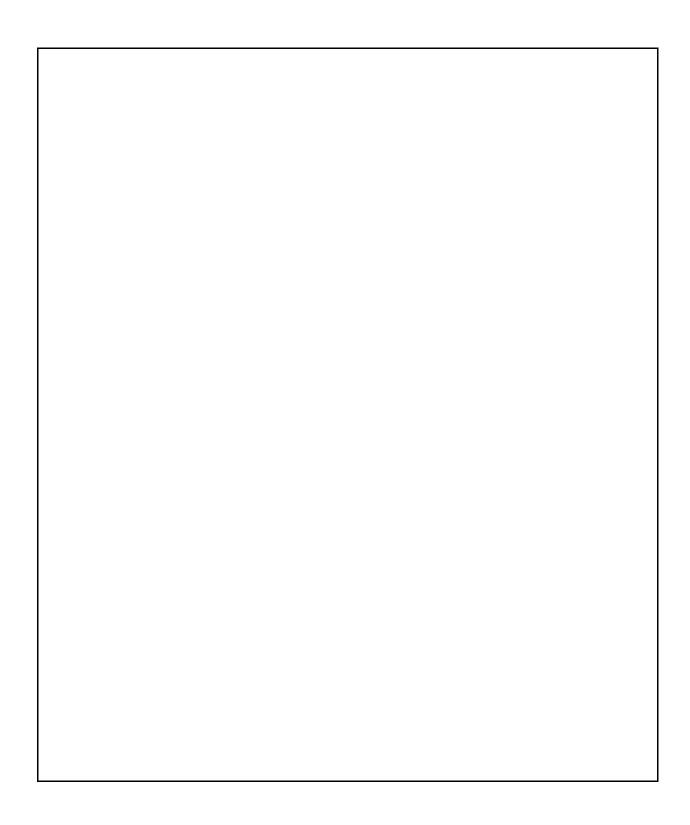
Behauptung	Begründung
$\beta =$	
α=	
α_2 =	
δ=	
MU =s	
x = R-s	
\triangle ABM \simeq \triangle ABU \simeq bedeutet "ist ähnlich zu"	
$\frac{s}{x} = \frac{R}{s}$	
$s^2 = R \cdot (R - s)$	
$s = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \cdot R$ bzw.	
$R = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \cdot s$	

Aufgabe 1.5.9 Zeige, dass sich der Umkreisradius R aus der Seitenlänge a durch folgende Konstruktion ergibt:



Hinweis: Berechne zuerst die Länge der Strecke \overline{AP} und damit $R = |\overline{AQ}|$

Aufgabe 1.5.10 : Konstruiere jetzt nur mit Zirkel und Lineal ein regelmäßiges Zehneck mit einer Seitenlänge a=3 cm

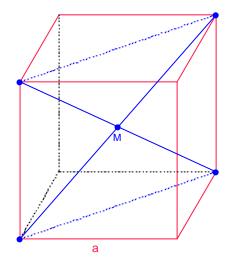


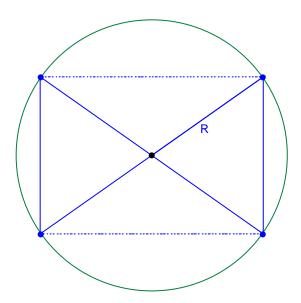
II) Platonische Körper:

Definition:

Ein Platonischer (vollkommen regelmäßiger) Körper ist ein Körper, dessen Seitenflächen alle aus kongruenten regelmäßigen n-Ecken bestehen und dessen Eckpunkte alle auf einer gemeinsamen Umkugel liegen.

Beispiel: Der Würfel hat 6 Quadrate als Seitenflächen und eine Umkugel, deren Mittelpunkt der Schnittpunkt der Raumdiagonalen ist.





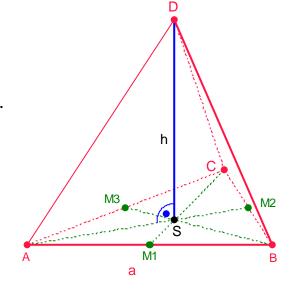
2.1 Der Würfel (Das Hexaeder)

Der Würfel ist der einfachste Platonische Körper. Die Beantwortung der meisten Fragen zum Würfel fallen dir bestimmt nicht schwer.

Anzahl e der Ecken	e=
Anzahl k der Kanten	k=
Anzahl f der Flächen	f=
Kantenlänge	L=
Oberfläche	O=
Volumen	V=
Umkugelradius R	R=
Innenkugelradius r	r=

2.2 Das Tetraeder

Das Tetraeder hat vier gleichseitige Dreiecke als Oberfläche.



Aufgabe 2.2.1 Formuliere mindestens fünf Fragen zum Tetraeder, die aus mathematischer Sicht interessant sind.

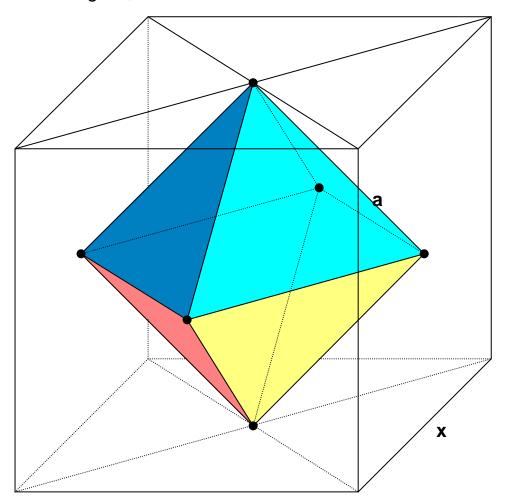
1.		
2.		
3.		
4.		
5.		

Die Beantwortung der meisten Fragen zum Tetraeder fallen ebenfalls nicht schwer :

Anzahl e der Ecken	e=
Anzahl k der Kanten	k=
Anzahl f der Flächen	f=
Kantenlänge	L=
Oberfläche	O=
Höhe	h=
Volumen	V=
Umkugelradius R	R=
Innenkugelradius r	r=

2.3 Das Oktaeder

Das Oktaeder steht in einer engen Beziehung zum Würfel. Verbindet man die Schnittpunkte der Oberflächendiagonalen eines Würfels mit der Seitenlänge x , so erhält man ein Oktaeder mit der Seitenlänge a :



Die Beantwortung der meisten Fragen zum Oktaeder fallen wieder nicht schwer :

Länge der Seite x in Abhängigkeit von der Seitenlänge a	X=
Anzahl e der Ecken	e=
Anzahl k der Kanten	k=
Anzahl f der Flächen	f=
Kantenlänge	L=
Oberfläche	O=
Höhe	h=
Volumen	V=
Umkugelradius R	R=
Innenkugelradius r	r=

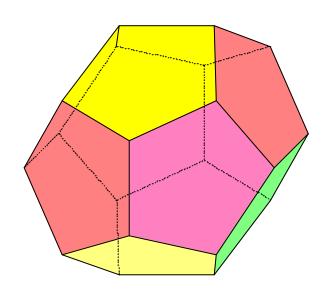
2.5 Das Dodekaeder

Das Dodekaeder hat ebenfalls wieder eine enge Beziehung zum Würfel:

Konstruiert man einen Würfel mit der Kantenlänge

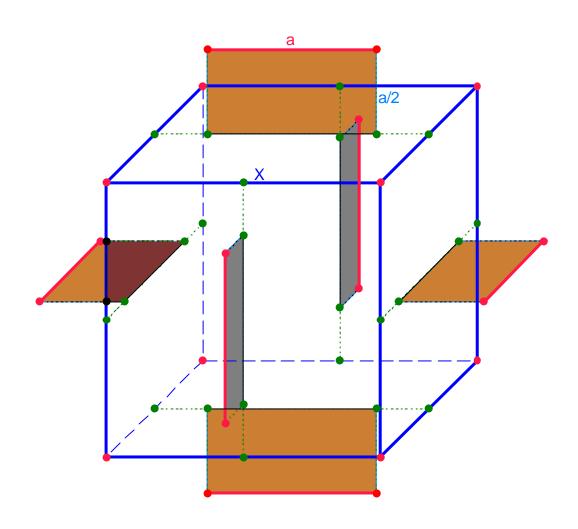
$$X = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \cdot a$$

und errichtet über den Mittellinien der Seiten zentriert jeweils in der Höhe



 $h^* = \frac{a}{2}$ die Seitenlänge a, (vgl. Skizze unten) dann bilden die 8 Eckpunkte

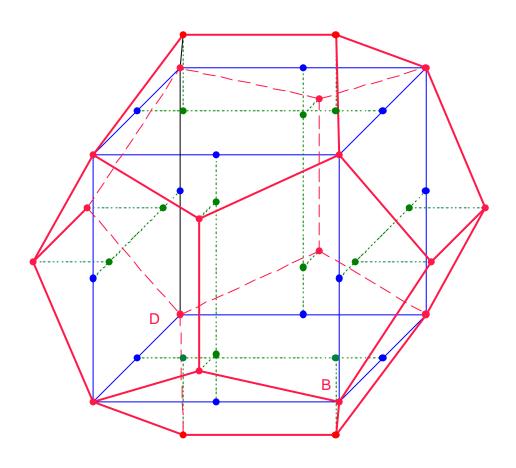
des Würfels und die 12 Endpunkte der errichteten Strecken a die insgesamt 20 Eckpunkte des Dodekaeders:



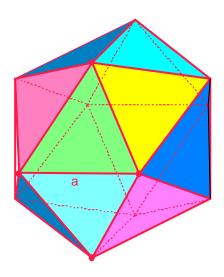
Aufgabe:

Bastle aus Pappe einen Würfel mit der Kantenlänge X≈16,2 cm.

Klebe dann auf jede Seite mittenzentriert ein Rechteck mit den Seitenlängen a=10cm und a/2=5cm wie in der Skizze. Verbinde dann die 20 Punkte mit Wollfäden oder mit dünnen Holzstäbchen und du erhältst ein schönes Kantenmodell des Dodekaeders mit dem einbeschriebenen Würfel.



2.5 Das Ikosaeder



Aufgabe 2.5.3: Formuliere mindestens 5 Fragen zum Ikosaeder, die aus mathematischer Sicht von Interesse sind. (Auch wenn du sie nicht sofort beantworten kannst!)

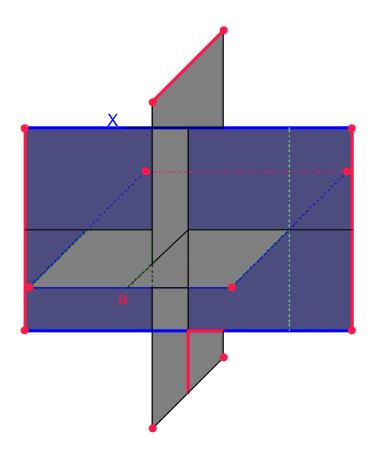
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			

Steckt man drei Rechtecke mit den Kantenlängen a und

 $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot a \approx 1,618 \cdot a$ (Goldener Schnitt!) symmetrisch zusammen,

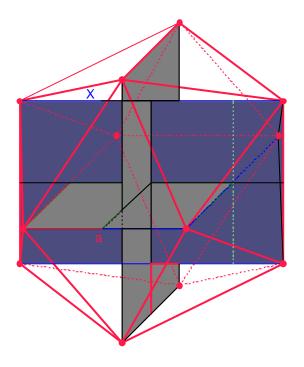
dann bestimmen die Eckpunkte der Rechtecke die 12 Eckpunkte eines Ikosaeders.

Abbildung 2.5.1



Aufgabe 2.5.1 Schneide drei Rechtecke mit den Seitenlängen a=10cm und $x \approx 16,18$ cm aus stabilem Karton aus und klebe sie wie oben gezeigt zusammen. Verbinde dann die Eckpunkte mit Wollfäden oder Holzstäbchen.

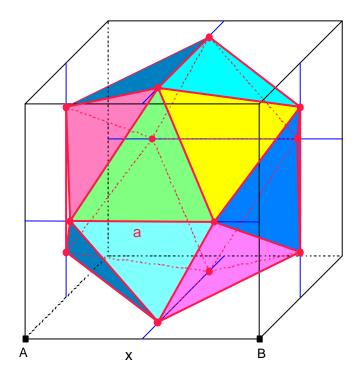
Du erhältst auch hier ein schönes Kantenmodell eines Ikosaeders mit a=10 cm.



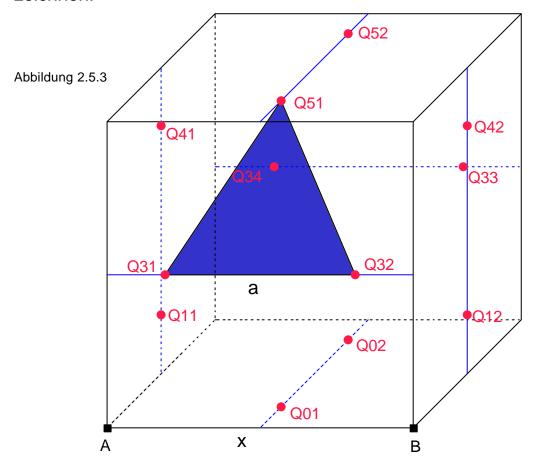
Das Ikosaeder steht wie alle regelmäßigen Körpern in einer engen Beziehung zum Würfel:

Aufgabe 2.5.2 Bastle aus Karton einen oben offenen Würfel mit der Seitenlänge x (Innenmaß!) und stecke das Kantenmodell des Ikosaeders in diesen Würfel.

Abbildung 2.5.2



Du erkennst dann sofort eine Möglichkeit das Ikosaeder im Schrägbild zu zeichnen:



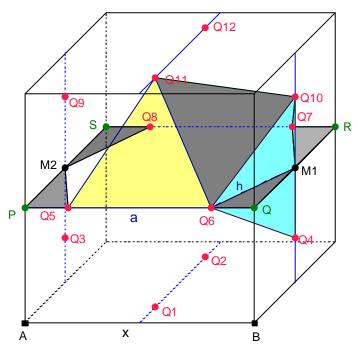
Die blauen Linien sind die Mittellinien der Seitenflächen, wobei die Seitenlänge a des Ikosaeders jeweils mittensymmetrisch aufgetragen sind. Die Verbindung der Eckpunkte ergibt das Ikosaeder im Schrägbild.

Das Ikosaeder mit der Seitenlänge a lässt sich in einen Würfel mit der Kantenlänge $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot a \approx 1,618 \cdot a$ einbeschreiben!

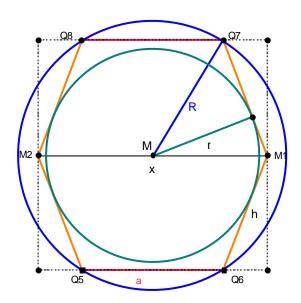
Aufgabe 2.5.3 Zeige, dass die Höhe h_g des "gelben" Dreiecks Q31,Q32, Q51 die Höhe eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge a ist.

(Hinweis: Suche ein Dreieck, in dem die Höhe $h_{\!g}$ vorkommt und berechne darin $h_{\!g}$)

Zur Berechnung des Umkugelradius R und des Innenkugelradius r mußt du dir den Würfel in der halben Höhe über dem Boden durchgeschnitten denken:



Du erhälst dann folgende Schnittfigur, mit deren Hilfe du R und r berechnen kannst.



Aufgabe 2.5.4	Berechne R und r

2.6 Es gibt nur fünf Platonische Körper

Der Beweis für diese Behauptung ist relativ einfach und seit der Antike bekannt.

Figuren, die als Begrenzungsflächen für die Platonischen Körper in Frage kommen sind nach Definition regelmäßige n-Ecke (n>2). An jedem Eckpunkt eines Platonischen Körpers stoßen gleich viele n-Ecke zusammen:



Platon 428-348 v. Chr.

Platonischer Körper	Oberfläche besteht aus	Anzahl der Flächen, die an einer Ecke zusammenstoßen
Tetraeder	4 gleichseitigen Dreiecken	3
Würfel	6 Quadraten	3
Oktaeder	8 gleichseitigen Dreiecken	4
Dodekaeder	12 regelmäßigen Fünfecken	3
Ikosaeder	12 gleichseitigen Dreiecken	5

Um den Beweis zu verstehen, ist es wichtig, dass du dir folgende Sachverhalte klar machst:

1.) An einer Ecke stoßen mindestens drei Kanten und damit mindestens drei Seitenflächen zusammen.

Aufgabe 2.6.2: Bastle aus Pappe jeweils eine Ecke mit

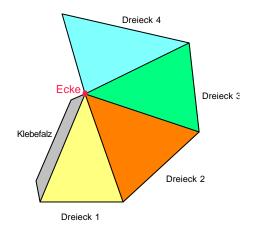
3 Kanten	4 Kanten	5 Kanten	6 Kanten	7 Kanten
notiere jeweils, wie viele Flächen dann an der Ecke zusammenstoßen				

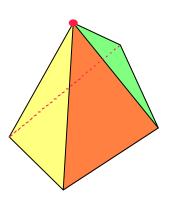
2.) Die Innenwinkel der Flächen, die in einer Ecke aneinander stoßen, müssen zusammen weniger als 360° ergeben, da man sonst keine Ecke herausbilden kann.

Aufgabe 2.6.1 Schneide verschiedene Dreiecke aus Papier aus und klebe sie so zusammen, dass sich eine Ecke bildet. (Klebefalze nicht vergessen!)

Beispiel:

Die ebenen Dreiecke bilden zusammengeklebt eine räumliche Ecke





3.) Da Platonische Körper vollkommen regelmäßig sein sollen, müssen an jeder Ecke gleich viele Flächen zusammenstoßen.

Aufgabe 2.6.2 Fülle folgende Tabelle aus:

Form der Seitenfläche	Größe des Innenwinkels	Maximalzahl der Flächen, die an einem Eckpunkt zusammentreffen können.
gleichs. Dreieck		·
Quadrat		
regelm. Fünfeck		
regelm. Sechseck		

Begründe mit einigen kurzen Sätzen, warum es nur Platonische Körper mit regelmäßigen Dreiecken, Vierecken und Fünfecken geben kann:
Aufgabe 2.6.3 Bilde Platonische Körper aus gleichseitigen Dreiecken.
a) Klebe drei gleichseitige Dreiecke zu einer Ecke Zusammen.
Du erhältst dann die Ecke eines
b) Klebe vier gleichseitige Dreiecke zu einer Ecke Zusammen.
Du erhältst dann die Ecke eines
c) Klebe fünf gleichseitige Dreiecke zu einer Ecke Zusammen.
Du erhältst dann die Ecke eines
Aufgabe 2.6.4 Bilde Platonische Körper aus Quadraten
d) Klebe drei Quadrate zu einer Ecke Zusammen.
Du erhältst dann die Ecke eines

Aufgabe 2.6.5 Bilde Platonische Körper regelmäßigen Fünfecken

e) Klebe drei	regelmäßige Fünfeck	e zu einer Ecke Zusammen.
Du erhältst	t dann die Ecke eines	

Damit hast du bewiesen, dass es nur diese fünf Platonischen Körper geben kann.

Ganz nebenbei kannst du noch einen mathematischen Satz finden, den der deutsche Mathematiker Leonard Euler gefunden hat und der Ihm zu Ehren seinen Namen trägt:

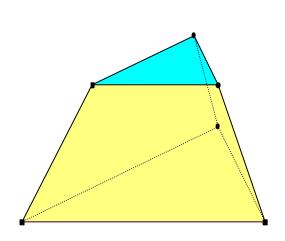
Aufgabe 2.6.6 Fülle dazu folgende Tabelle aus:

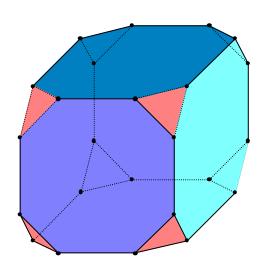
Name des	Anzahl der Ecken	Anzahl der Kanten	Anzahl der Flächen	E+F-K=
Körpers	E	K	F	
Tetraeder				
Würfel				
Oktaeder				
Dodekaeder				
Ikosaeder				

Dieser Sachverhalt gilt nicht nur bei den Platonischen Körpern sondern bei allen Körpern, deren Oberfläche aus beliebigen Vielecken besteht. Fülle die Tabelle für die beiden unten gezeichneten Körper aus:

Fülle dazu folgende Tabelle aus:

Name des Körpers	Anzahl der Ecken E	Anzahl der Kanten K	Anzahl der Flächen F	E+F-K=
Körper 1				
Körper 2				





Körper 1: Tetraederstumpf

Körper 2: Abgestumpfter Würfel

Eulerscher Polyedersatz (ein Polyeder ist ein Körper mit vielen Flächen)

Bezeichnet man die Anzahl der Ecken des Körpers mit E, die Anzahl der Kanten des Körpers mit K, und die Anzahl der Flächen des Körpers mit F so gilt:

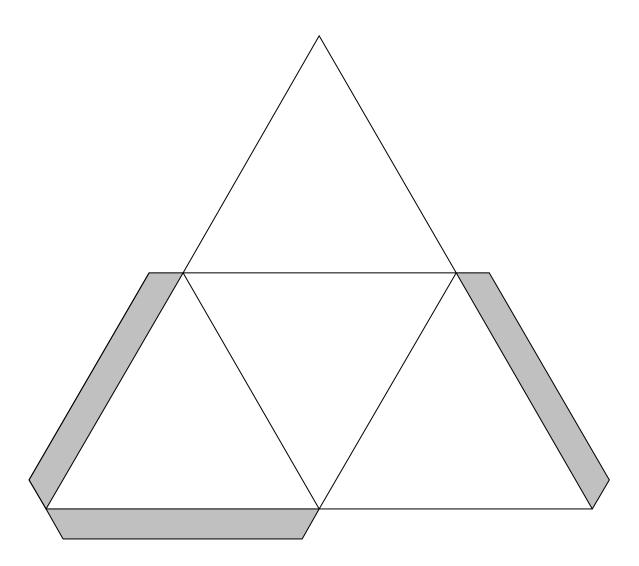
Die folgernden Netze, können dazu dienen, die Platonischen Körper zu basteln.

Mit einem Kopierer lassen sich auch Vergrößerungen der Netze herstellen. Damit erhältst du dann größere Modelle.

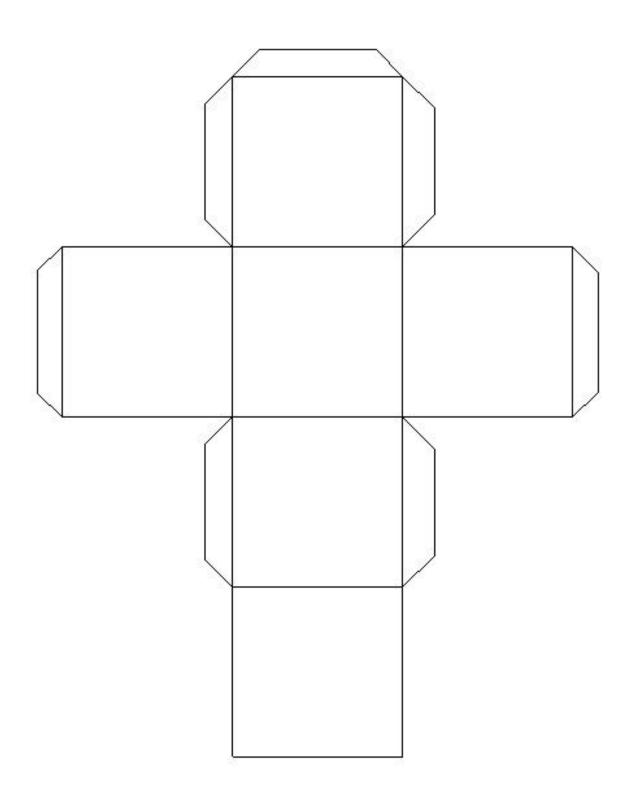
Übertrage die Figuren auf festere Pappe. Du kannst die Eckpunkte mit einer Nadel durchstechen und die Figur dann schnell nachzeichnen. Damit die Kanten sehr schön werden, kannst du sie mit einem Messer vor dem Knicken leicht einritzen.

Eine andere schöne Möglichkeit besteht darin, aus Holzstäben ein Gittermodell dieser Körper zu bauen: Viel Spaß bei der Arbeit!

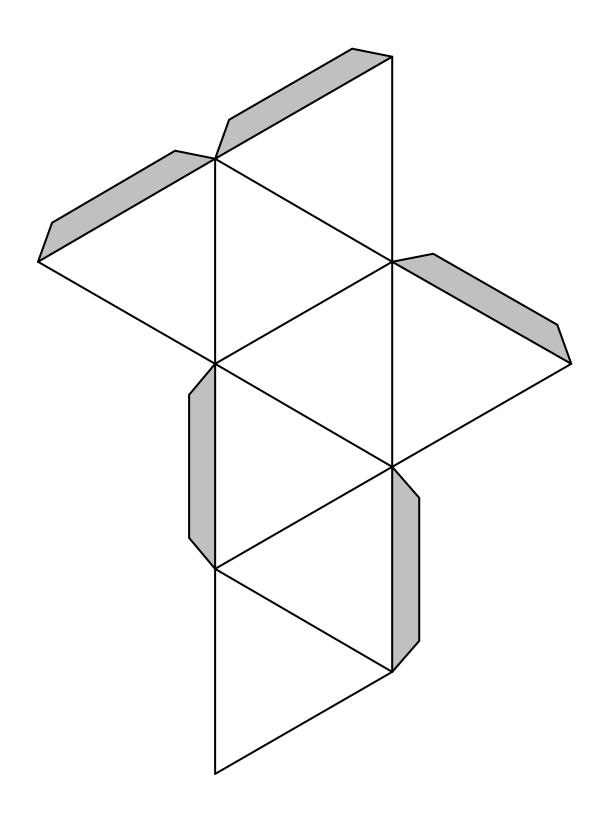
Das Tetraedernetz:



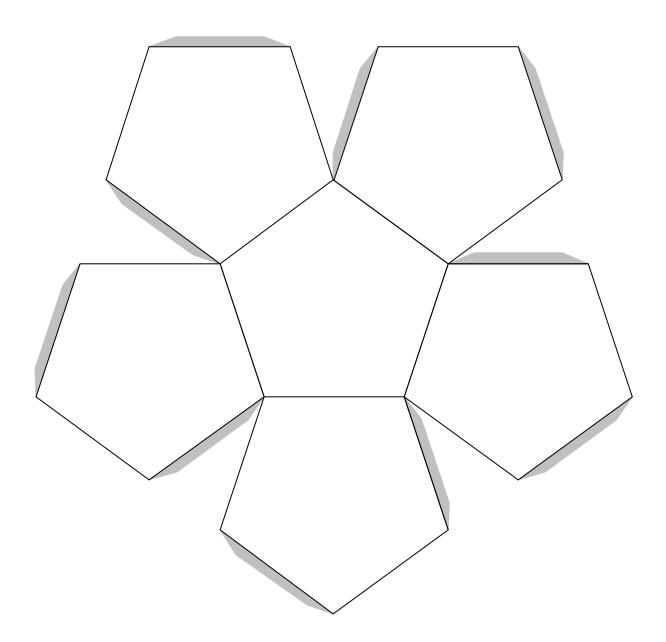
Das Würfelnetz:



Das Oktaedernetz:



Das Dodekaedernetz besteht aus zwei identischen Teilen. Du musst diese Figur also zwei mal ausschneiden und die beiden Teile passend zusammenkleben!



Das Ikosaedernetz:

