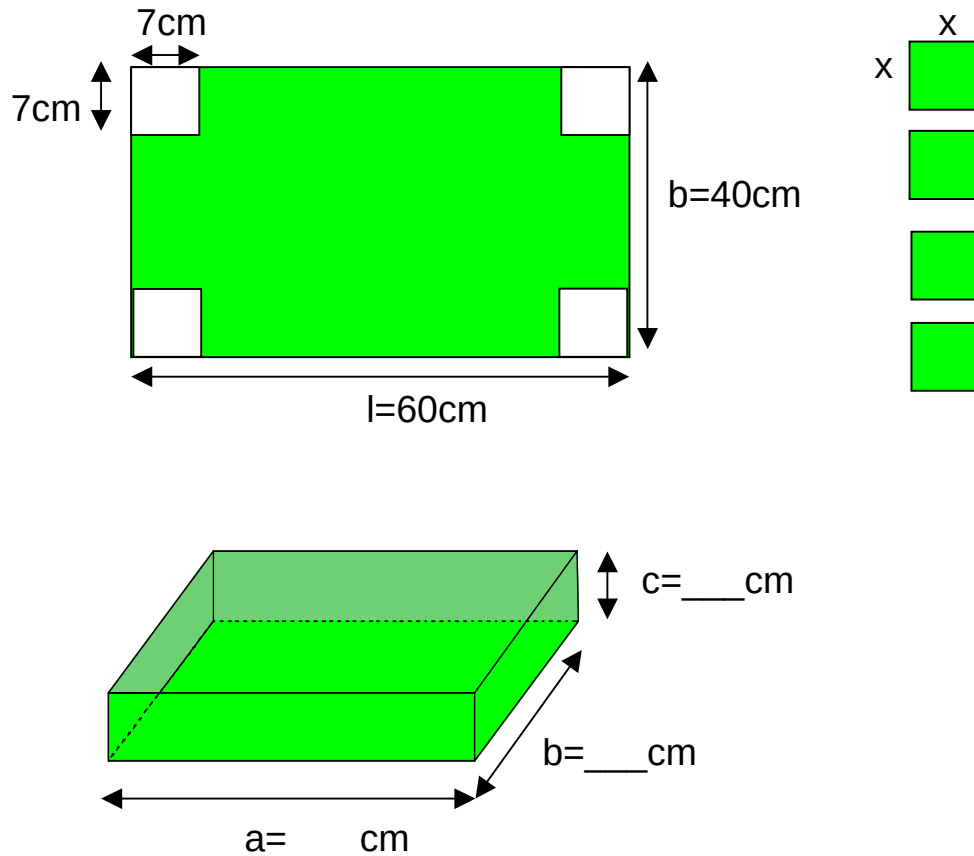


Extremwertaufgabe 1 :

Schachtel

Aus einem rechteckigen Kartonbogen (Länge $l=60\text{cm}$; Breite $b=40\text{cm}$) soll eine einfache rechteckige Schachtel gefaltet werden. Dazu werden an jeder Ecke ein quadratisches Stück (Seitenlänge $x=7\text{cm}$) ausgeschnitten und die Seitenteile längs der gestrichelten Linie hochgeklappt.



1.) Bestimme die Maße a, b, c der gefalteten Schachtel

2.) Berechne das Volumen der Schachtel

$$V = \text{---} = \text{---} \text{ cm}^3$$

3.) Stelle für das Volumen V der Schachtel einen Term auf, mit dem man bei gegebenem x das Volumen berechnen kann:

$$V = \text{---}$$

- 4.) Berechne das Volumen der Schachtel für
 $x = 1\text{ cm}; 2\text{ cm}; 4\text{ cm}; 8\text{ cm}; 12\text{ cm}; 16\text{ cm}; 19\text{ cm}$ und stelle die Ergebnisse in
 einer Tabelle zusammen:

x (cm)	1	2	4	7	8	12	18	19
V(cm ³)								

- 5.) Bestimme mit Hilfe deiner Ergebnisse diejenige Größe für x, bei der das
 Volumen maximal wird.

Antwort: Für $X \approx \underline{\hspace{1cm}}$ cm wird das Volumen der Kiste maximal.

Lösung der Aufgabe mit den Mitteln der Differenzialrechnung:

$$V(x) = (60 - 2x)(40 - 2x)x = 4x^3 - 200x^2 + 2400x \quad ; \quad x \leq 20$$

#1: $(60 - 2 \cdot x) \cdot (40 - 2 \cdot x) \cdot x$

#2:

$$4 \cdot x^3 - 200 \cdot x^2 + 2400 \cdot x$$

#3: $\frac{d}{dx} (4 \cdot x^3 - 200 \cdot x^2 + 2400 \cdot x)$

#4:

$$12 \cdot x^2 - 400 \cdot x + 2400$$

#5: $12 \cdot x^2 - 400 \cdot x + 2400 = 0$

#6: $\text{SOLVE}(12 \cdot x^2 - 400 \cdot x + 2400 = 0, x)$

#7:

$$x = \frac{50}{3} - \frac{10 \cdot \sqrt{7}}{3} \vee x = \frac{10 \cdot \sqrt{7}}{3} + \frac{50}{3}$$

#8:

$$x = 25.4 \vee x = 7.8$$

Mögliche Extremstelle der Funktion V : $x = \frac{50 - 10\sqrt{7}}{3} \approx 7,4$

$$V''(x_1) < 0$$

V ist maximal, wenn $x = \frac{50 - 10\sqrt{7}}{3} \approx 7,4$ gewählt wird.

#13: $g(x) := (60 - 2 \cdot x) \cdot (40 - 2 \cdot x) \cdot x$

#14: $g\left(\frac{50}{3} - \frac{10 \cdot \sqrt{7}}{3}\right)$

#15:

$$\frac{56000 \cdot \sqrt{7}}{27} + \frac{80000}{27}$$

#16:

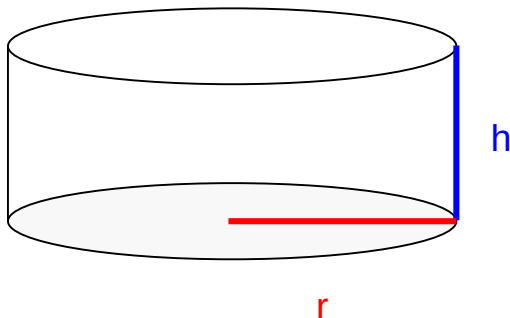
8452

Das maximale Volumen ist dann: $V_{\max} \approx 8452 \text{ cm}^3$

Extremwertaufgabe 2 :

Eine Zylinderförmige Dose (oben offen) soll bei vorgegebener Oberfläche ein maximales Volumen besitzen.

- Löse die Aufgabe zuerst für $O=100 \text{ cm}^2$
- Löse die Aufgabe allgemein



$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

Hier ist V eine Funktion von 2 Variablen

Nebenbedingung: $O=100$

$$0 = \pi \cdot r^2 + 2\pi r \cdot h$$

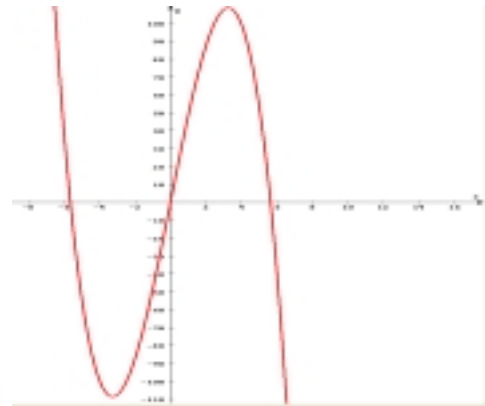
$$100 = \pi \cdot r^2 + 2\pi r \cdot h \Rightarrow h = \frac{100 - \pi \cdot r^2}{2\pi r}$$

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot \frac{100 - \pi \cdot r^2}{2\pi r} = 50 \cdot r - \frac{\pi}{2} r^3$$

$$V(r) = 50 \cdot r - \frac{\pi}{2} r^3$$

Jetzt ist es nur noch reine Routine:

$$V_{\max} \approx 108,5 \text{ cm}^3$$



#1:	$50 \cdot r - \frac{\pi}{2} \cdot r^3$	
#2:	$\frac{d}{dr} \left(50 \cdot r - \frac{\pi}{2} \cdot r^3 \right)$	
#3:		$50 - \frac{3 \cdot \pi \cdot r^2}{2}$
#4:	$50 - \frac{3 \cdot \pi \cdot r^2}{2} = 0$	
#5:	$\text{SOLVE} \left(50 - \frac{3 \cdot \pi \cdot r^2}{2} = 0, r, \text{Real} \right)$	
#6:		$r = -\frac{10 \cdot \sqrt{3}}{3 \cdot \sqrt{\pi}} \vee r = \frac{10 \cdot \sqrt{3}}{3 \cdot \sqrt{\pi}}$
#7:		$r = -3.25 \vee r = 3.25$
#8:	$\frac{d}{dr} \left(50 - \frac{3 \cdot \pi \cdot r^2}{2} \right)$	
#9:		$-3 \cdot \pi \cdot r$
#10:	$U2(r) := -3 \cdot \pi \cdot r$	
#11:	$U2 \left(\frac{10}{\sqrt{3 \cdot \pi}} \right)$	
#12:		$-10 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{\pi}$
#13:	$U(r) := 50 \cdot r - \frac{\pi}{2} \cdot r^3$	
#14:	$U \left(\frac{10}{\sqrt{3 \cdot \pi}} \right)$	
#15:		$\frac{1000 \cdot \sqrt{3}}{9 \cdot \sqrt{\pi}}$
#16:		108.5

Für unser Problem nur eine mögliche Extremstelle bei $r = \frac{10}{\sqrt{3\pi}} \approx 3,25$

Wegen $V''(r) < 0$ liegt hier auch das Maximum und das maximale Volumen ist

$$V_{\max} \approx 108,5 \text{ cm}^3$$

Die allgemeine Lösung :

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

$$0 = \pi \cdot r^2 + 2\pi r \cdot h \Rightarrow h = \frac{0 - \pi \cdot r^2}{2\pi r}$$

$$V(r) = \frac{0}{2}r - \frac{\pi}{2}r^3$$

$$\#1: \frac{0}{2} \cdot r - \frac{\pi}{2} \cdot r^3$$

$$\#2: \frac{d}{dr} \left(\frac{0}{2} \cdot r - \frac{\pi}{2} \cdot r^3 \right)$$

#3:

$$\frac{0}{2} - \frac{3 \cdot \pi \cdot r^2}{2}$$

$$\#4: \frac{0}{2} - \frac{3 \cdot \pi \cdot r^2}{2} = 0$$

$$\#5: \text{SOLVE} \left(\frac{0}{2} - \frac{3 \cdot \pi \cdot r^2}{2} = 0, r, \text{Real} \right)$$

#6:

$$r = -\frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{0}}{3 \cdot \sqrt{\pi}} \vee r = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{0}}{3 \cdot \sqrt{\pi}}$$

Für unser Problem nur eine mögliche Extremstelle bei $r = \frac{\sqrt{0}}{\sqrt{3\pi}} = \sqrt{\frac{0}{3\pi}}$

$$\#7: \frac{d}{dr} \left(\frac{0}{2} - \frac{3 \cdot \pi \cdot r^2}{2} \right)$$

#8:

$$\#9: V_2(r) := - 3 \cdot \pi \cdot r$$

$$\#10: V_2 \left(\frac{\sqrt{0}}{\sqrt{(3 \cdot \pi)}} \right)$$

#11:

$$\#12: V(r) := \frac{0}{2} \cdot r - \frac{\pi}{2} \cdot r^3$$

$$\#13: V \left(\frac{\sqrt{0}}{\sqrt{(3 \cdot \pi)}} \right)$$

#14:

$$\frac{\sqrt{3} \cdot 0^{3/2}}{9 \cdot \sqrt{\pi}}$$

Wegen $V''(r) < 0$ liegt hier auch das Maximum und das maximale Volumen ist

$$V_{\max} = \frac{\sqrt{30^3}}{9\sqrt{\pi}}$$