Übungsaufgaben zur Kursarbeit

I) Thema Funktionen

1.1 Gib jeweils die maximale Definitionsmenge der Funktion an

$$f(x) = (x-1)^2 \quad D_f = \mathbb{R}$$

$$h(x) = \sqrt{x-3} \quad D_h = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \geq 3\}$$

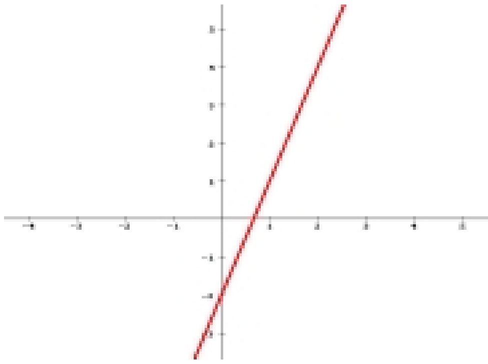
$$g(x) = \frac{1}{(x-1)^2} \quad D_g = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \neq 1\}$$

$$k(x) = \frac{1}{\sqrt{x-3}} \quad D_k = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x > 3\}$$

$$l(x) = \frac{\sqrt{x+10}}{x^2+2x+1} \quad D_l = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \geq -10 \text{ und } x \neq -1\}$$

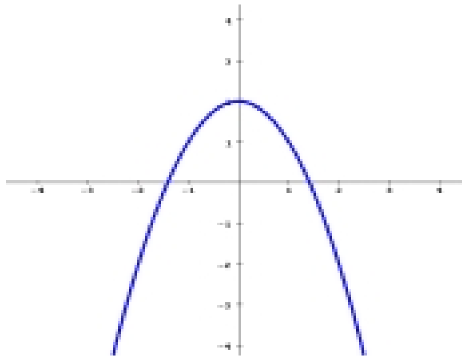
1.2 Gib die Wertemenge der folgenden Funktionen an

$f(x) = 3x - 2 \quad ; x \in \mathbb{R}$



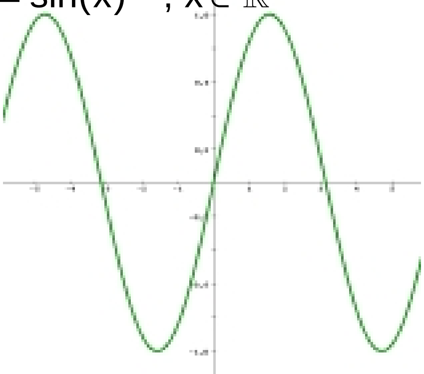
$W_f = \mathbb{R}$ alle Zahlen werden als Funktionswerte angenommen !

$g(x) = 2 - x^2 \quad ; x \in \mathbb{R}$



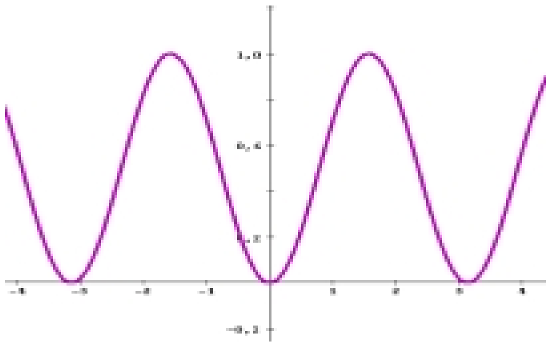
$W_g = \left]-\infty; 2\right]$ alle Zahlen ≤ 2 werden als Funktionswerte angenommen !

$h(x) = \sin(x) \quad ; x \in \mathbb{R}$



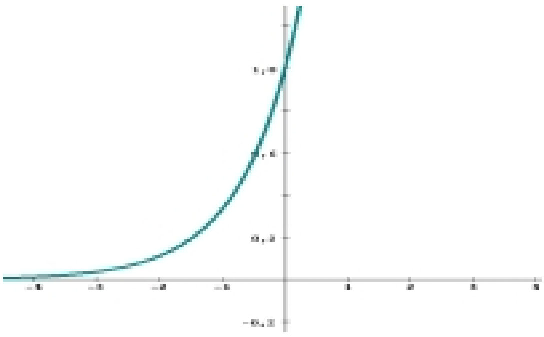
$W_h = [-1; 1]$ alle Zahlen zwischen –1 und 1 einschließlich werden als Funktionswerte angenommen !

$k(x) = [\sin(x)]^2 \; ; x \in \mathbb{R}$



$W_k = [0; 1]$ alle Zahlen zwischen 0 und 1 einschließlich werden als Funktionswerte angenommen !

$l(x) = 3^x \quad ; x \in \mathbb{R}$



$W_l = \left]0; \infty\right[= \mathbb{R}^+$ alle Zahlen zwischen 0 und ∞ (0 ausschließlich) werden als Funktionswerte angenommen !

1.3 Erkläre die Begriffe Funktionsname, Funktionsterm, Funktionsgleichung, Definitionsmenge, Wertemenge, Funktion an einem selbst gewählten Beispiel

Mathematisch vollständige Beschreibung einer Funktion (Beispiel)

$$f: \ x \to f(x) = \sqrt{2x-7} \qquad D_f = \{x \in \mathbb{R} / x > \frac{7}{2}\}$$

f ist der Name der Funktion

$\sqrt{2x-7}$	ist der Funktionsterm
$f(x) = \sqrt{2x-7}$	ist die Funktionsgleichung
$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x > \frac{7}{2}\}$	ist die Definitionsmenge. Sie enthält alle Werte für x, die man in die Funktionsgleichung einsetzen darf.
$W_f = \mathbb{R}_0^+ = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 0\} = [0;\infty[$	ist die Wertemenge von f. Sie enthält alle reellen Zahlen, die von f als Funktionswerte angenommen werden.

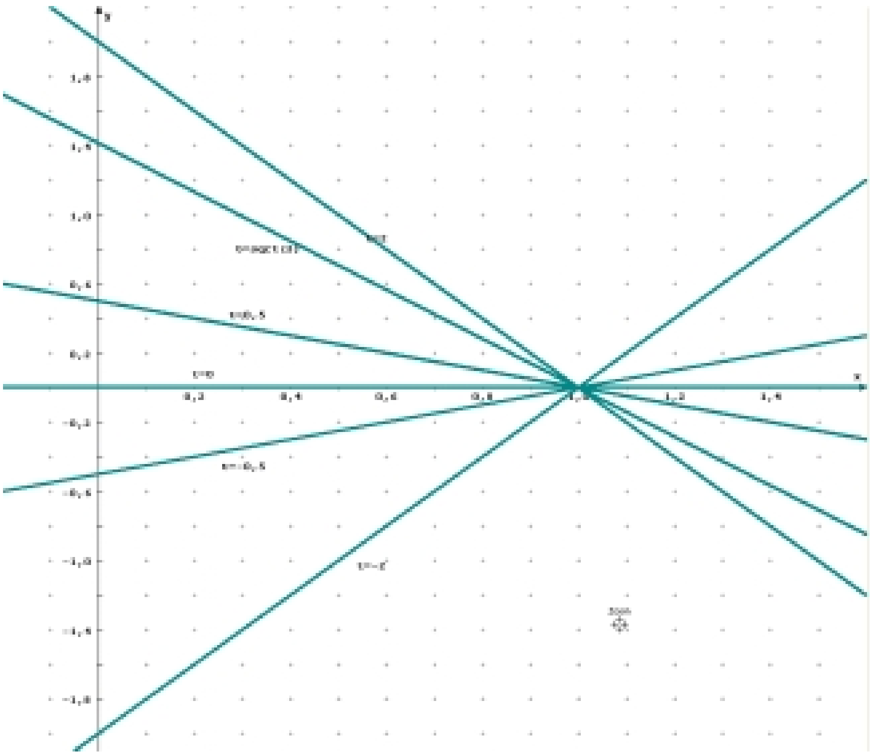
1.4 Wie lauten die Aussagen verbal ?

f(2)=3	Der Funktionswert an der Stelle X=2 ist 3
f(-1)=0	Der Funktionswert an der Stelle X=-1 ist 0 -1 ist eine Nullstelle der Funktion f
f(10)<2	Der Funktionswert an der Stelle x=10 ist kleiner als 2
f(x)>0 für alle x	Die Funktionswerte der Funktion f sind alle größer als 0 Alle punkte des Graphen G_f liegen oberhalb der x-Achse
$(5/-1) \in G_f$	Der Funktionsgraph G_f enthält den Punkt (5/-1) Der Funktionswert an der Stelle x=5 ist –1

II) Thema Lineare Funktionen

2.1 Durch $f_t(x) = -tx + t \quad D_{f_t} = \mathbb{R} \quad t \in \mathbb{R}$ ist eine Schar von Funktionen festgelegt.

a) Zeichne die Graphen zu f_0; $f_2; f_{-2}; f_{0,5}; f_{-0,5}; f_{\sqrt{2}}$ in ein gemeinsames Koordinatensystem



b) Zeige, dass alle Graphen einen gemeinsamen Punkt besitzen

1.Möglichkeit (wenn ich den Punkt kenne !)
Der Punkt (1/0) liegt auf allen Graphen d.h. alle Funktionen haben an der Stelle x=1 eine Nullstelle :

$$-tx + t = 0$$

$$-tx = -t \,|: t$$

$$1.\text{Fall } t \neq 0: \quad x = \frac{-t}{-t} = 1 \text{ d.h. Nullstelle bei } x = 1$$

$$2.\text{Fall } t = 0: \quad 0x = 0 \text{ allgemeingültig}$$

$$\text{d.h. jede Zahl ist Nullstelle also auch } x = 1!$$

2.Möglichkeit (wenn ich den Punkt nicht kenne !)
Dann muss ich zwei beliebige Graphen nehmen und deren Schnittpunkt berechnen:

$$f_a(x) = -ax + a \quad D_{f_a} = \mathbb{R} \quad a \in \mathbb{R}$$
$$f_b(x) = -bx + b \quad D_{f_b} = \mathbb{R} \quad b \in \mathbb{R} \quad b \neq a$$

$$-ax + a = -bx + b \qquad |+bx - a$$
$$(b-a)\cdot x = b - a \qquad |:\underbrace{(b-a)}_{\neq 0}$$

$$X = \frac{b-a}{b-a} = 1$$ d.h.alle Graphen schneiden sich bei $x = 1$

Wegen $f_a(1) = f_b(1) = 0$

liegt der gemeinsame Schnittpunkt aller Graphen bei S(1/0)

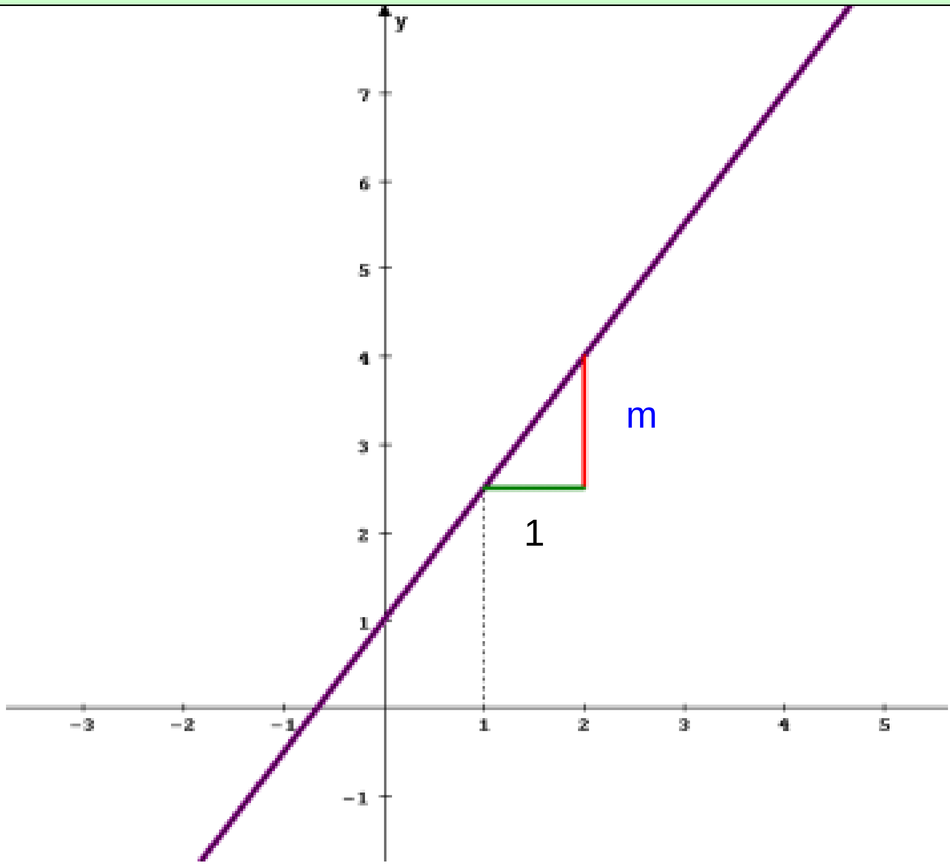
c) Für welche Funktion f_t verläuft der Graph durch den Punkt P(-2 | 3) ?

$$-t\cdot(-2) + t = 3 \Rightarrow t = 1$$

d.h. die Funktion $f_1(x) = -x + 1$ hat an der stelle –2 den Funktionswert 3

2.2 Erläutere, was man unter der Steigung einer Geraden versteht.

Wenn ich mich auf irgend einem Punkt P(x/y) auf einer Geraden befinde und mich von dort aus um 1 Einheit nach rechts bewege dann gibt die Steigung m an, dass ich mich gerade m Einheiten in y-Richtung bewegen muss, um wieder auf der Geraden zu landen.



2.3 Was bedeuten die Aussagen

a) Die Steigung der Geraden beträgt 0,2

Steigungsdreieck : 1 nach rechts 0,2 nach oben

b) Die Steigung der Geraden beträgt 0

Die Gerade verläuft horizontal d.h. 1 nach rechts 0 nach oben/unten

b) Die Steigung der Geraden beträgt $-\frac{3}{5}$

Steigungsdreieck : 1 nach rechts $\frac{3}{5}$ nach unten

bzw. 5 nach rechts und 3 nach unten !

c) Die Steigung der Geraden beträgt 22%

d)

Steigungsdreieck : 1 nach rechts 0,22 nach oben

bzw. 100 nach rechts und 22 nach oben !

e) Die Steigungswinkel der Geraden beträgt 42°
Der Winkel zwischen x-Achse und Gerade beträgt 42°

$$m = \tan(42°) \approx 0{,}900$$

Die Steigung beträgt 0,9 oder 90%

III) Thema ganzrationale Funktionen

3.1 Erkläre den Begriff „ganzrationale Funktion"

Eine GRF ist eine Funktion mit folgender Funktionsgleichung :

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i \quad ; \; n \in \mathbb{N} \text{ und alle } a_i \in \mathbb{R}$$

3.2 Erkläre den Begriff „Grad einer ganzrationale Funktion"
Wenn a_n ungleich 0 ist, dann ist die Funktion vom Grad n
Der Grad ist der höchste vorkommende Exponent von x im Funktionsterm !

3.3 Welche Funktionen sind ganzrational ?
Gib jeweils eine Begründung !
Falls die Funktion ganzrational ist, gib jeweils den Grad an

$f(x) = -\sqrt{2}x^4 - x^5$ GRF 5 – ten Grades

$g(x) = 3x^5 - 6\sqrt{x}$ keine GRF, da $x^{\frac{1}{2}}$ nicht erlaubt ist.

$h(x) = 3(x^2 - 2x)^2 = 3x^4 - 12x^3 + 12x^2$ GRF 4 – ten Grades

$k(x) = \dfrac{5x^2 - 3x}{x}$ keine GRF

Aufpassen: die Funktion $\tilde{k}(x) = 5x - 3$ ist nicht identisch mit der Funktion k, da sie nicht den gleichen Definitionsbereich besitzt !

3.3 Woran erkennt man sofort, dass eine GRF
a) symmetrisch zur y-Achse ist ?
Wenn eine GRF nur gerade Exponenten hat (0 ist eine gerade Zahl), dann ist sie achsensymmetrisch zur y-Achse.

b) punktsymmetrisch zu (0/0) ist ?
Wenn eine GRF nur ungerade Exponenten hat , dann
ist sie punktsymmetrisch zu (0/0).

3.4 Welches Verhalten für $x \to \pm\infty$ zeigen die folgenden Funktionen ?

$f(x) = 3x - x^3$ $\quad \lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$

$g(x) = -2x^4 + 1000x^3$ $\quad \lim_{x\to\infty} g(x) = -\infty \quad \lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$

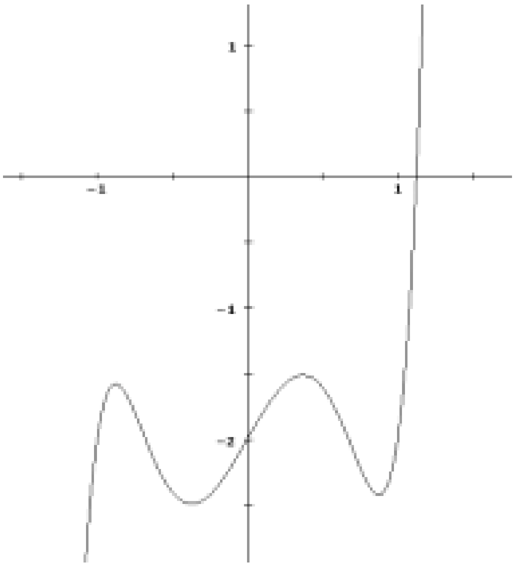
$h(x) = (2x-1)^4 + 22$ $\quad \lim_{x\to\infty} h(x) = \infty \quad \lim_{x\to-\infty} h(x) = \infty$

$k(x) = x(x-2)(x+3)^2$ $\quad \lim_{x\to\infty} k(x) = \infty \quad \lim_{x\to-\infty} k(x) = \infty$

3.4 Welchen Grad hat die GRF f , deren

Graph die nebenstehende Form hat ?

Die Antwort ist korrekt zu begründen!



Bildet man eine neue Funktion
g(x)=f(x)+2, dann ist diese Funktion

auch eine GRF und hat 5 Nullstellen

d.h. sie ist mindestens 5-ten Grades !

3.5 Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^3 + 2x^2 - 17x + 6 \quad ; D_f = \mathbb{R}$

a) Bestimme die Nullstellen der Funktion

raten: x=3 ist eine Nullstelle

Polynomdivision :

$$(x^3 + 2x^2 - 17x + 6) : (x - 3) = x^2 + 5x - 2$$

also ist

$$f(x) = (x - 2) \cdot (x^2 + 5x - 2)$$

Die Lösungen von

$$(x^2 + 5x - 2) = 0 \quad \text{sind}$$

$$x_2 = -\frac{5}{2} - \frac{\sqrt{33}}{2} \quad \text{und} \quad x_3 = -\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{33}}{2}$$

$$x_2 \approx -5{,}4 \qquad x_3 \approx -0{,}37$$

b) Bestimme das Verhalten für $x \to \pm\infty$

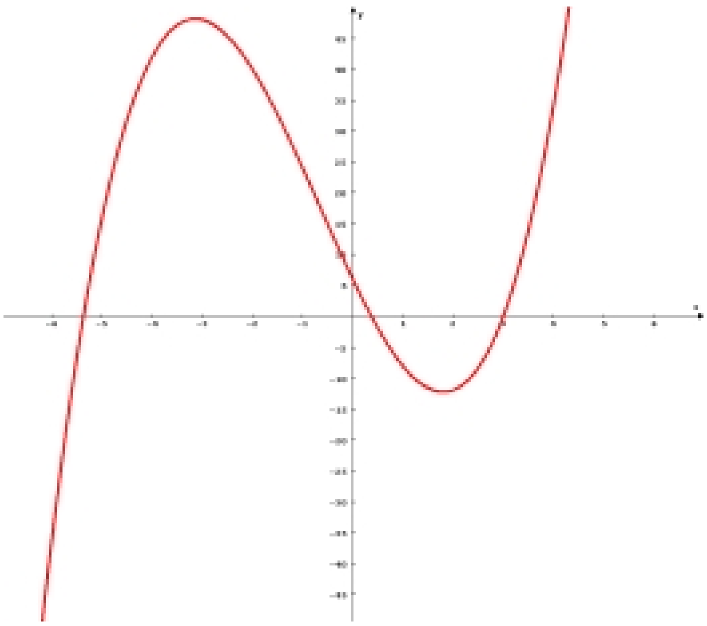
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

weil x^3 den Verlauf für große (kleine) x bestimmt.

c) Bestimme den y-Achsenabschnitt

f(0)=6

d) Skizziere mit diesen Angaben den Graph zu f



3.6 Führe die Polynomdivisionen aus :

$$
\begin{array}{l}
(4x^3-4x^2-25x+20):(2x-1)=2x^2-x-13 \\
\underline{-(4x^3-2x^2)} \\
\quad -2x^2-25x \\
\quad \underline{-(-2x^2+\ \ x)} \\
\qquad -26x+20 \\
\qquad \underline{-(-26x+13)} \\
\qquad\qquad 7
\end{array}
$$

also ist

$$(4x^3-4x^2-25x+20):(2x-1)=2x^2-7x+13+\frac{7}{2x-1}$$

$$(a^4-1):(a-1)=a^3+a^2+a+1$$

Eine ähnliche Aufgabe haben wir schon einmal gerechnet !

IV) Thema Differenzierbarkeit - Ableitung

4.1 Erkläre folgende Aussagen:

a) die Funktion f(x) ist an der Stelle x=2 differenzierbar

Der Grenzwert des Differenzenquotienten $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$ existiert.

oder:

Der Graph G_f besitzt im Punkt (2/f(2)) eine eindeutige Tangente

b) $f'(2)=3$

Die Funktion f ist an der Stelle x=2 differenzierbar. Der Grenzwert des Differenzenquotienten ist 3 bzw. die Tangentensteigung an der Stelle 2 ist 3 .

c) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(7+h)-f(7)}{h}=-\sqrt{2}$

$f'(7)=-\sqrt{2}$ oder : Die Tangentensteigung an der Stelle 7 ist $-\sqrt{2}$

e) f besitzt an der Stelle x=3 keine Ableitung

Der Grenzwert des Differenzenquotienten $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}$ existiert nicht. An den Graphen kann an der Stelle x=3 keine Tangente gelegt werden.

4.2 Zeige, dass die Funktion $f(x)=3x^2-1$ an jeder Stelle x differenzierbar ist.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(3(x+h)^2-1)-(3x^2-1)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(3x^2+6xh+3h^2-1)-(3x^2-1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{(3x^2+6xh+3h^2-1)-(3x^2-1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{(6xh+3h^2)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{h(6x+3h)}{h}$$
$$\lim_{h\to 0}(6x+3h)=6x$$

also gilt $f'(x)=6x$

4.3 Zeige, dass für $g(x)=\frac{3}{x}$; $D_g=\mathbb{R}^+$

die Ableitungsfunktion $g'(x)=-\frac{3}{x^2}$; $D_g=\mathbb{R}^+$ ist.

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{3}{(x+h)}-\frac{3}{x}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{3x-3(x+h)}{x(x+h)}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3x-3(x+h)}{hx(x+h)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-3h}{hx(x+h)}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{-3}{x(x+h)}=-\frac{3}{x\cdot x}=-\frac{3}{x^2}$$

4.1 Sizziere den Verlauf von $f(x)=2^x$ $D_f=\mathbb{R}$

a) Bestimme Näherungsweise die Steigung der Tangente an der Stelle x=0 indem du den Wert des Differenzenquotienten für h=0,001 (h=0,000001) berechnest.

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\frac{2^{0+h}-2^0}{h}\approx\frac{2^{0,001}-2^0}{0,001}\approx 0,69$$

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\frac{2^{0+h}-2^0}{h}\approx\frac{2^{0,000001}-2^0}{0,000001}\approx 0,69314$$

also ist $f'(0)\approx 0,69$

b) Wie lautet dann näherungsweise Funktionsgleichung der Tangente ?

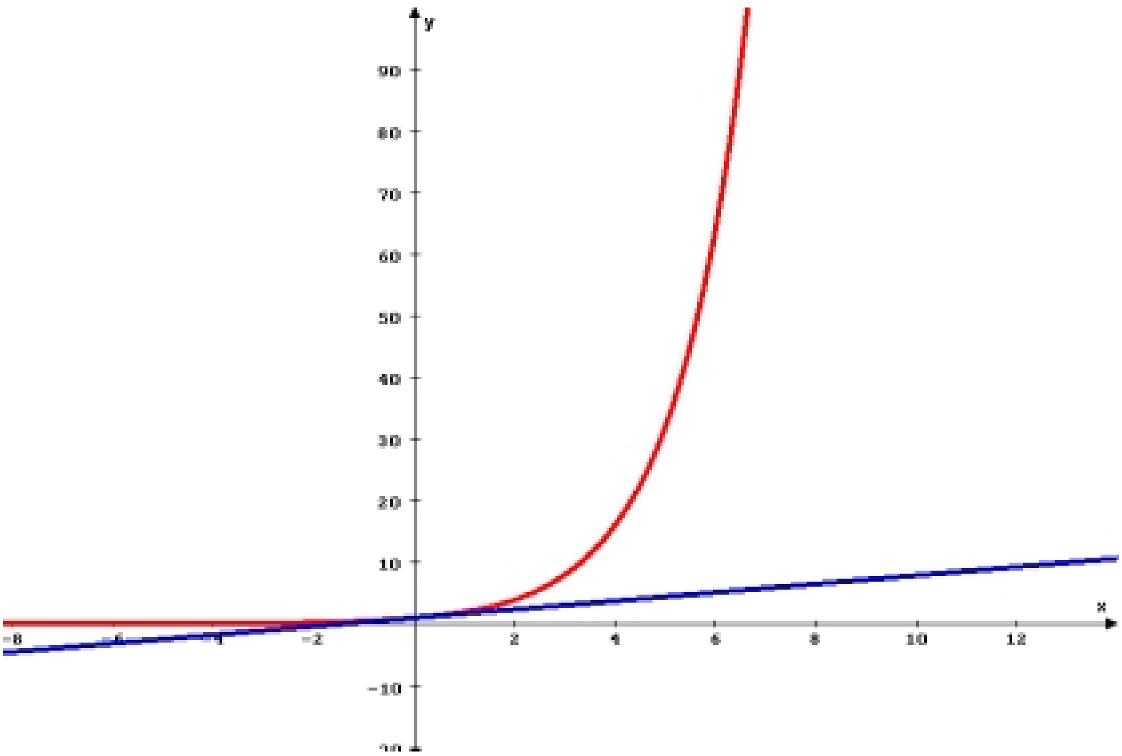
$t(x) = m \cdot x + b \approx 0{,}69 \cdot x + b$

Die Tangente verläuft durch den Punkt (0/1) d.h.

$t(0) = 1$

$t(0) = 1 = m \cdot 0 + b \;\Rightarrow b = 1$

Gleichung der Tangente: $t(x) \approx 0{,}69 \cdot x + 1$



4.2 Bestimme die Ableitungen :

$f(x) = 3x^5 - 5x + 3$ $\quad f'(x) = 15x^4 - 5$

$g(x) = x^7 + \sqrt{x}$ $\quad g'(X) = 7x^6 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$h(x) = -\dfrac{2}{x^3} + \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{5}{x}$ $\quad h'(x) = \dfrac{6}{x^4} - \dfrac{2}{x^3} + \dfrac{5}{x^2}$