Vektoren und Vektorräume

Gegeben ist eine Menge V

Die Elemente dieser Menge V werden mit

$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \ldots\ldots$ **bezeichnet und Vektoren genannt.**

In der Menge V ist für alle Vektoren eine Verknüpfung $\oplus$ definiert.

Bsp.: $\vec{u} \oplus \vec{v}, \quad \vec{x} \oplus \vec{w} \quad \ldots\ldots\ldots$

Diese Verknüpfung heißt Vektoraddition

Vektoren

In der Menge V ist für alle Vektoren eine Verknüpfung $\oplus$ definiert.

Bsp.: $\vec{u} \oplus \vec{v}$, $\vec{x} \oplus \vec{w}$ ....

Diese Verknüpfung heißt Vektoraddition

Zusätzlich ist für alle Vektoren $\vec{v} \in V$ eine Verknüpfung $\odot$ mit reellen Zahlen definiert.

Bsp.: $3 \odot \vec{v}$ $(-2) \odot \vec{v}$ $\sqrt{5} \odot \vec{v}$ ....

Diese Verknüpfung heißt skalare Multiplikation eines Vektors mit einer reellen Zahl.

kurz: S-Multiplikation

Definition eines Vektorraums

$V(\oplus;\odot)$ heißt Vektorraum über $\mathbb{R}$

wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. $(V,\oplus)$ **ist eine K-Gruppe**

   Hinweis:

   Das neutrale Element wird mit $\vec{0}$ bezeichnet. (Nullvektor)

   Das zu $\vec{v}$ inverse Element wird mit $-\vec{v}$ bezeichnet (Gegenvektor)

Definition eines Vektorraums

$V(\oplus;\odot)$ **heißt Vektorraum über** $\mathbb{R}$

wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. $(V,\oplus)$ ist eine K-Gruppe

2. Für die S-Multiplikation gelten folgende Eigenschaften:

   2.1 $\lambda \odot \vec{v} \in V$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ $\vec{v} \in V$

   2.2 $(\lambda \bullet \mu) \odot \vec{v} = \lambda \bullet (\mu \odot \vec{v})$ $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ $\vec{v} \in V$

   2.3 $(\lambda + \mu) \odot \vec{v} = (\lambda \odot \vec{v}) \oplus (\mu \odot \vec{v})$ für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ $\vec{v} \in V$

   2.4 $1 \odot \vec{v} = \vec{v}$ für alle $\vec{v} \in V$

Vektoren

Die haben Vektoren eingeführt. Man führt keine Vektoren so zum Spaß ein. Die führen was im Schilde !

Vektoren sind Elemente eines Vektorraums !

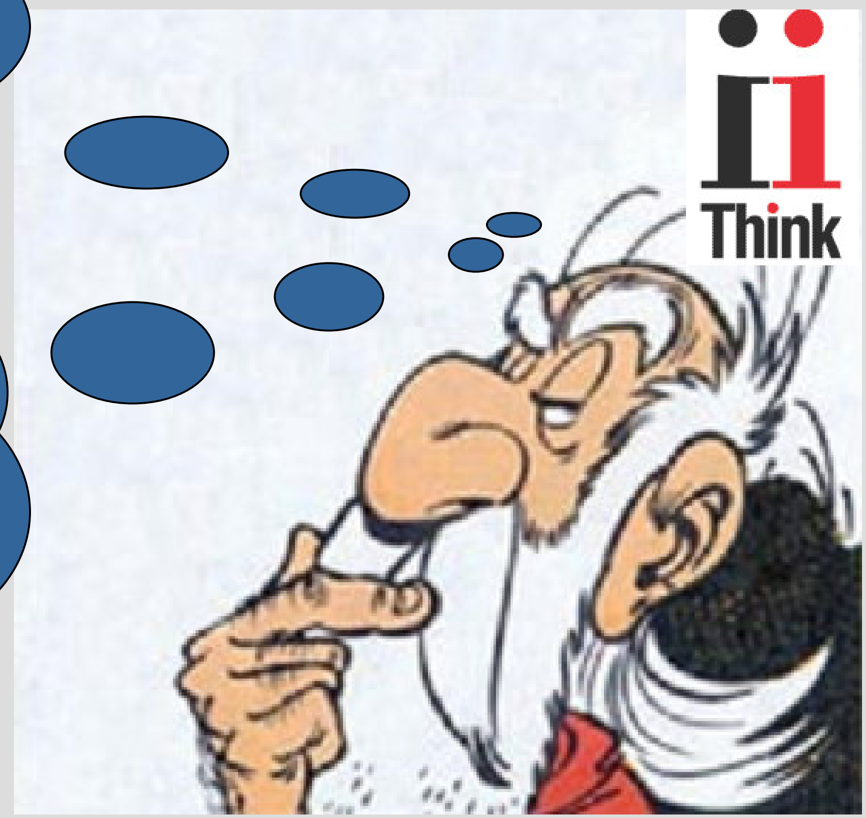
Vektoren ?!?!

Ohne Modell bleibt alles im Nebel !

think different !

$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\sqrt{3}$ $f(x) = mx + n$

$(5/-2)$ $\begin{pmatrix} 4 & i \\ -i & \sqrt{2} \end{pmatrix}$



Beispiele für Vektorräume 1

Beispiel 1:

Sei P_3 die Menge aller Polynome höchstens dritten Grades mit den Vektoren

$$\vec{p} = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \quad \text{mit } a_i \in \mathbb{R} \text{ für } i = 0..3$$

und den Verknüpfungen

$$(a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0) \oplus (b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0) =$$

$$(a_3 + b_3)x^3 + (a_2 + b_2)x^2 + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)$$

$$\lambda \odot (a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0) =$$

$$(\lambda a_3)x^3 + (\lambda a_2)x^2 + (\lambda a_1)x + (\lambda a_0) \quad \text{mit } \lambda \in \mathbb{R}$$

bildet einen Vektorraum über den reellen Zahlen

Beispiele für Vektorräume 1

Beispiel 1:

$$\vec{p} = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \quad \text{mit } a_i \in \mathbb{R} \text{ für } i = 0..3$$

Der Nullvektor in P_3 ist $\vec{0} = 0x^3 + 0x^2 + 0x + 0$

Der Gegenvektor zu $\vec{p} = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

ist gerade $-\vec{p} = (-a_3)x^3 + (-a_2)x^2 + (-a_1)x + (-a_0)$

Aufgabe: Zeige, dass $(P_3; \oplus; \odot)$ ein Vektorraum ist.

Beispiele für Vektorräume 2

Beispiel 2:

Die Menge aller reellen 3-Tupel $\mathbb{R}^3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} / \ x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$

mit den Verknüpfungen

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix} \qquad \lambda \odot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda y_1 \\ \lambda z_1 \end{pmatrix} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

bildet einen Vektorraum über den reellen Zahlen

Beispiele für Vektorräume 2

Die Vektoren sind hier

3-Tupel

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad x, y, z \in \mathbb{R}$$

Der Nullvektor in R^3 ist

$$\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Der Gegenvektor zu $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ist $-\vec{v} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}$

Aufgabe: Zeige, dass $(\mathbb{R}^3; \oplus; \odot)$ ein Vektorraum ist.

Beispiele für Vektorräume 3

Beispiel 3:

Die Menge M_{22} aller 2-2-Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \qquad a;b;c;d \in \mathbb{R}$$

und den Verknüpfungen

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix}$$

$$\lambda \odot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

bildet einen Vektorraum über den reellen Zahlen

Beispiele für Vektorräume 3

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Der Nullvektor in M_{22} ist

$$\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Der Gegenvektor zu $\vec{p} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ist $-\vec{p} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}$

Aufgabe: Zeige, dass $(M_{22};\oplus;\odot)$ ein Vektorraum ist.

Beispiele für Vektorräume 4

Beispiel 4:

Die Menge L aller Lösungstupel $(x_1| x_2|x_3|x_4)$ der homogenen Gleichung

$$2x_1+3x_2-x_3-2x_4=0$$

bilden mit den Verknüpfungen

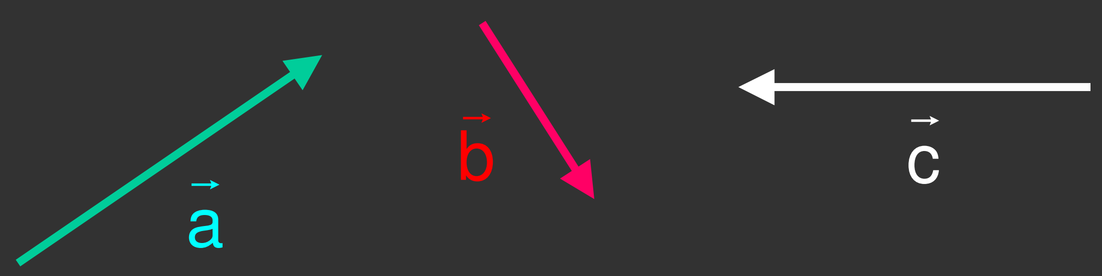
$$(a\,|\,b\,|\,c\,|\,d)\oplus(e\,|\,f\,|\,g\,|\,h)=(a+e\,|\,b+f\,|\,c+g\,|\,d+h)$$
$$\lambda\odot(a\,|\,b\,|\,c\,|\,d)=(\lambda a\,|\,\lambda b\,|\,\lambda c\,|\,\lambda d)$$

einen Vektorraum über $\mathbb{R}$

Aufgabe: Zeige, dass $L(\oplus;\odot)$ ein Vektorraum ist.

Beispiele für Vektorräume 4

Beispiel 4: Wir betrachten die Menge V aller „Pfeilgrößen“ im dreidimensionalen Raum.



Ein Vektor $\vec{x}$ ist eine Pfeilgröße, die durch zwei Eigenschaften charakterisiert ist :

$\vec{x}$ besitzt einen Betrag $|\vec{x}|$ (eine Länge)

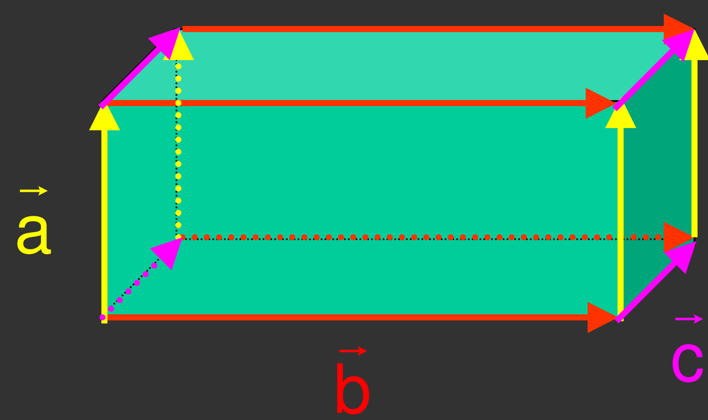
$\vec{x}$ besitzt eine Richtung

Gleichheit von Vektoren

Definition:

Zwei Vektoren sind gleich, wenn sie in Betrag und Richtung übereinstimmen :

$$(\vec{a}=\vec{b}) \Leftrightarrow \left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right| \quad \wedge \ \mathrm{Richt}(\vec{a})=\mathrm{Richt}(\vec{b})$$

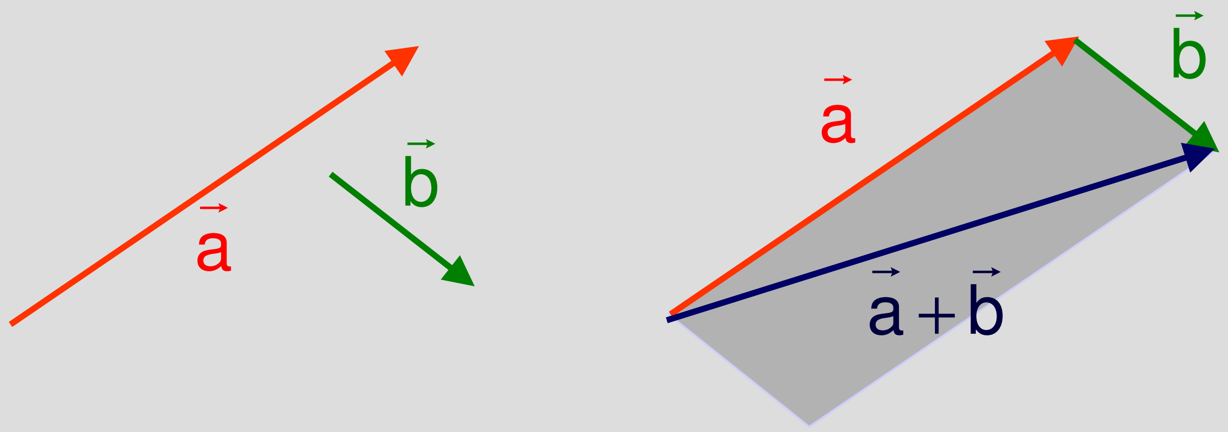


Definition: Addition von Vektoren

1. **Die Summe zweier (bzw. mehrerer) Vektoren ist wieder ein Vektor :**

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$$

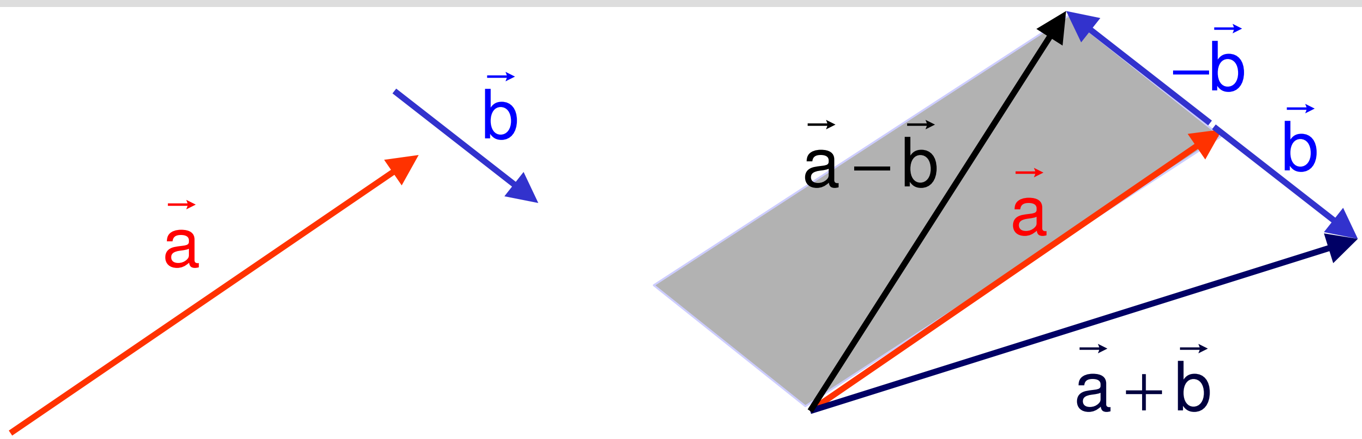
2. **Den Summenvektor finde ich mit der Parallelogrammregel :**



Definition: Subtraktion von Vektoren

1. Die Differenz zweier (bzw. mehrerer)
2. Vektoren ist wieder ein Vektor : $\vec{a} - \vec{b} = \vec{d}$

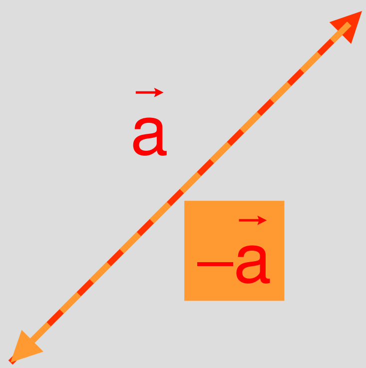
2. Die Differenz wird als Summe mit dem Gegenvektor des Subtrahenden definiert: $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$



Definition: Der Nullvektor

1. Die Differenz zweier (bzw. mehrerer) Vektoren kann einen Vektor mit der Länge 0 ergeben, den so genannten Nullvektor:

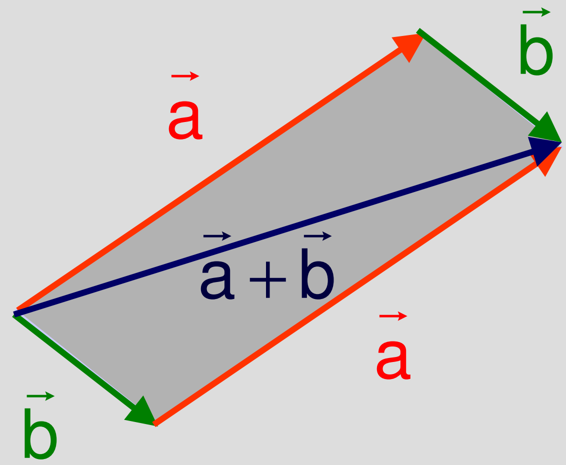
$$\vec{a} - \vec{a} = \vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$$



Die Richtung des Nullvektors ist dabei beliebig !

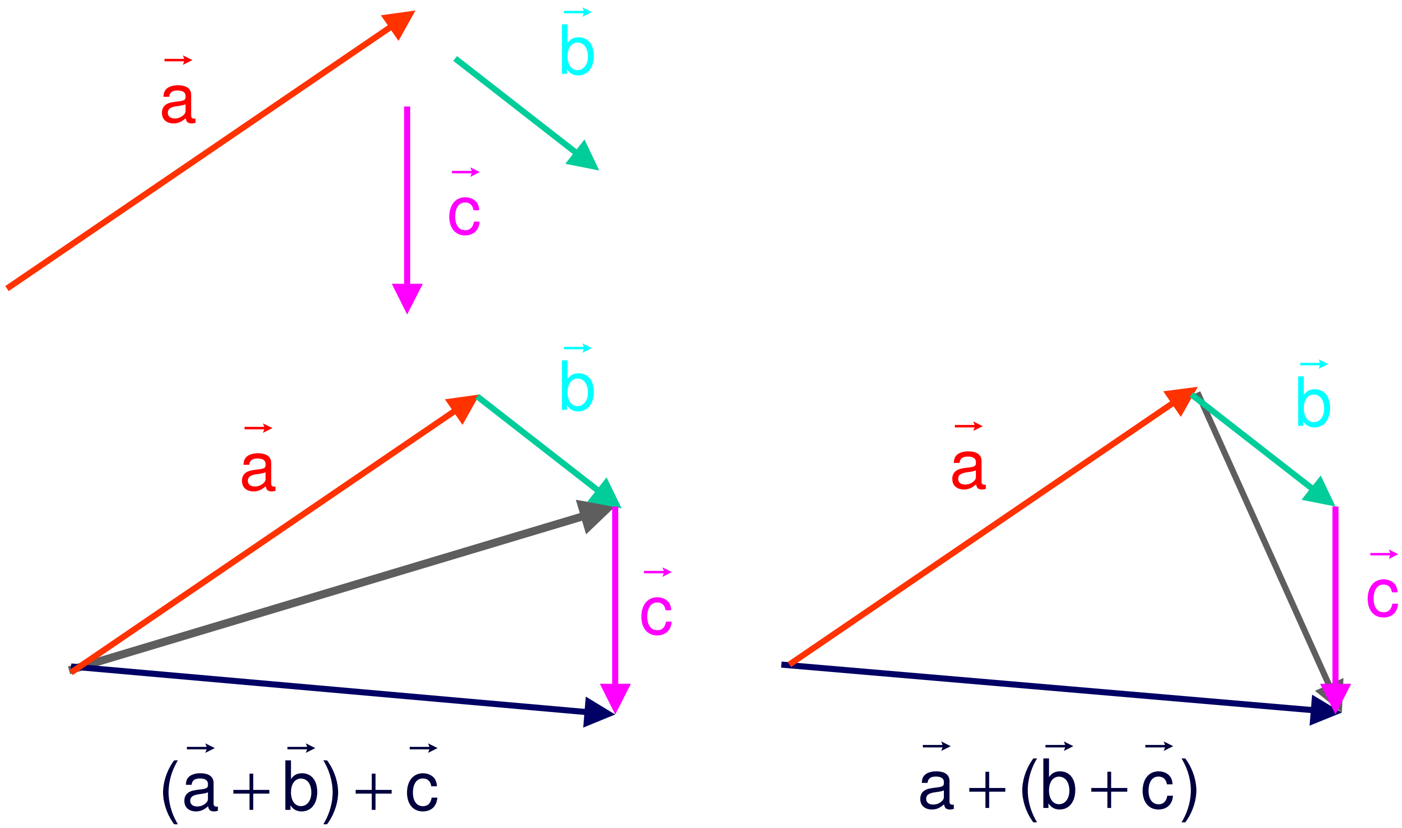
Kommutativgesetz der Addition

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \quad \text{für alle Vektoren } \vec{a}, \vec{b}$$



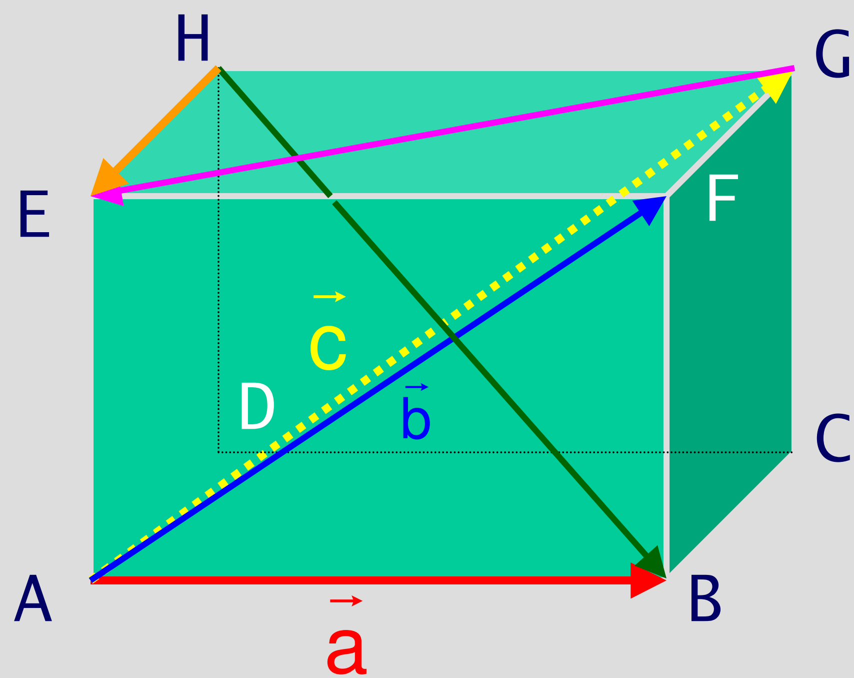
Assoziativgesetz der Addition

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}) \quad \text{für alle Vektoren } \vec{a},\vec{b},\vec{c}$$



Übung 1 Vektorketten

Drücke den Vektor $\overrightarrow{HB}$ bzw. $\overrightarrow{GE}$ als Summe mit den Vektoren $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ aus:

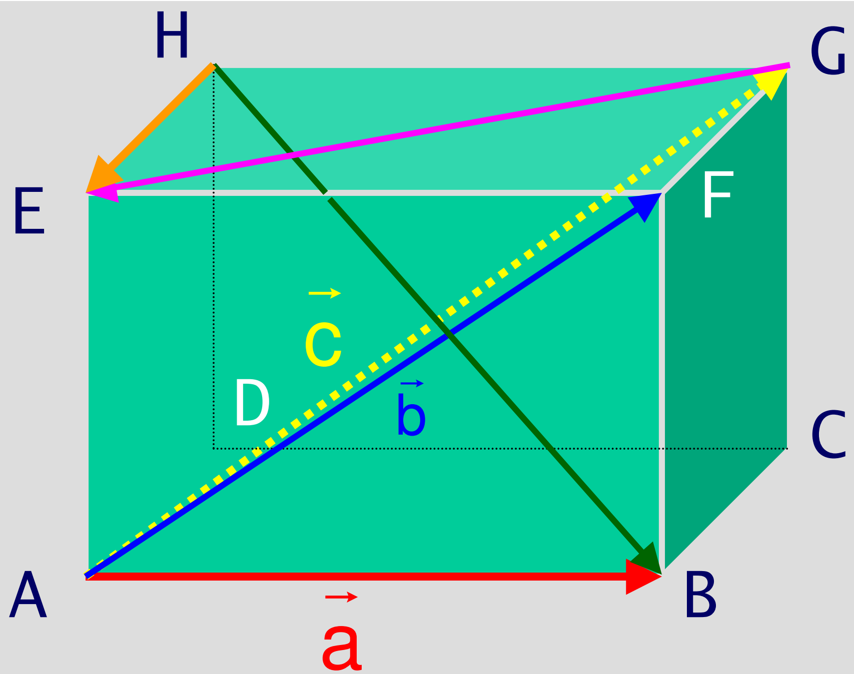


$$\overrightarrow{HB} = (-\vec{b}) + (-\vec{c}) + \vec{a} = \vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$$

$$\overrightarrow{GE} = (-\vec{b}) + (-\vec{a}) = -\vec{a} - \vec{b} = -(\vec{a} + \vec{b})$$

Drücke die Vektoren $\overrightarrow{HE}, \overrightarrow{GE}, \overrightarrow{HB}$ jeweils als

Summe mit den Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ aus:



$$\overrightarrow{HE} = \overrightarrow{GF} =$$

$$(-\vec{c}) + \vec{b} = \vec{b} + (-\vec{c}) = \vec{b} - \vec{c}$$

$$\overrightarrow{GE} = \overrightarrow{GF} + \overrightarrow{FE} =$$

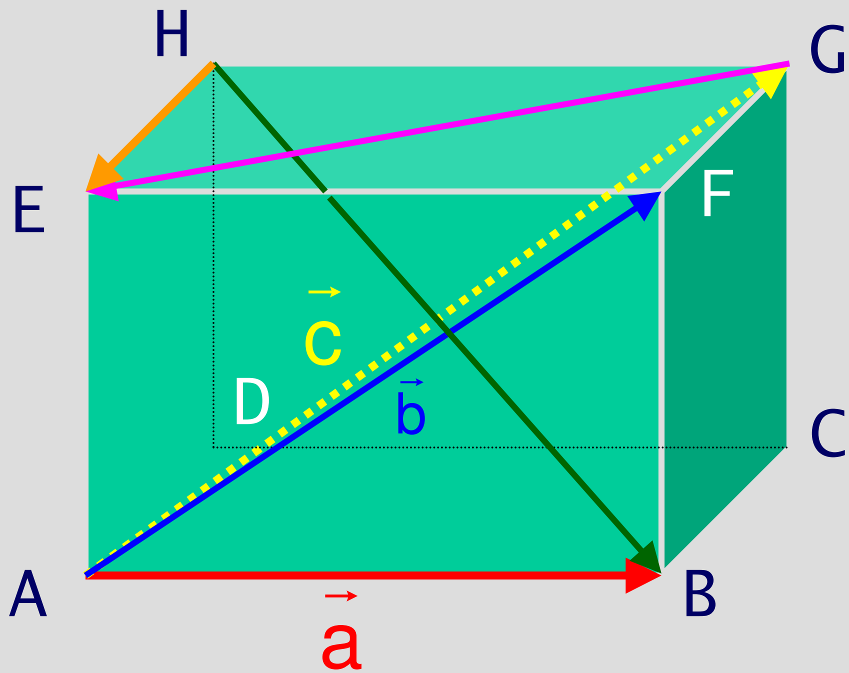
$$\vec{b} - \vec{c} + (-\vec{a}) = -\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$$

$$\overrightarrow{HB} = \overrightarrow{HG} + \overrightarrow{GF} + \overrightarrow{FB} = \vec{a} + (\vec{b} - \vec{c}) + (\vec{a} - \vec{b}) =$$

$$2 \cdot \vec{a} + (-\vec{c}) = 2 \cdot \vec{a} - \vec{c}$$

Übung2

Drücke die Vektoren $\overrightarrow{HE}, \overrightarrow{GE}, \overrightarrow{HB}$ jeweils als Summe mit den Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ aus:



$$\overrightarrow{HE} = \overrightarrow{GF} =$$

$$(-\vec{c}) + \vec{b} = \vec{b} + (-\vec{c}) = \vec{b} - \vec{c}$$

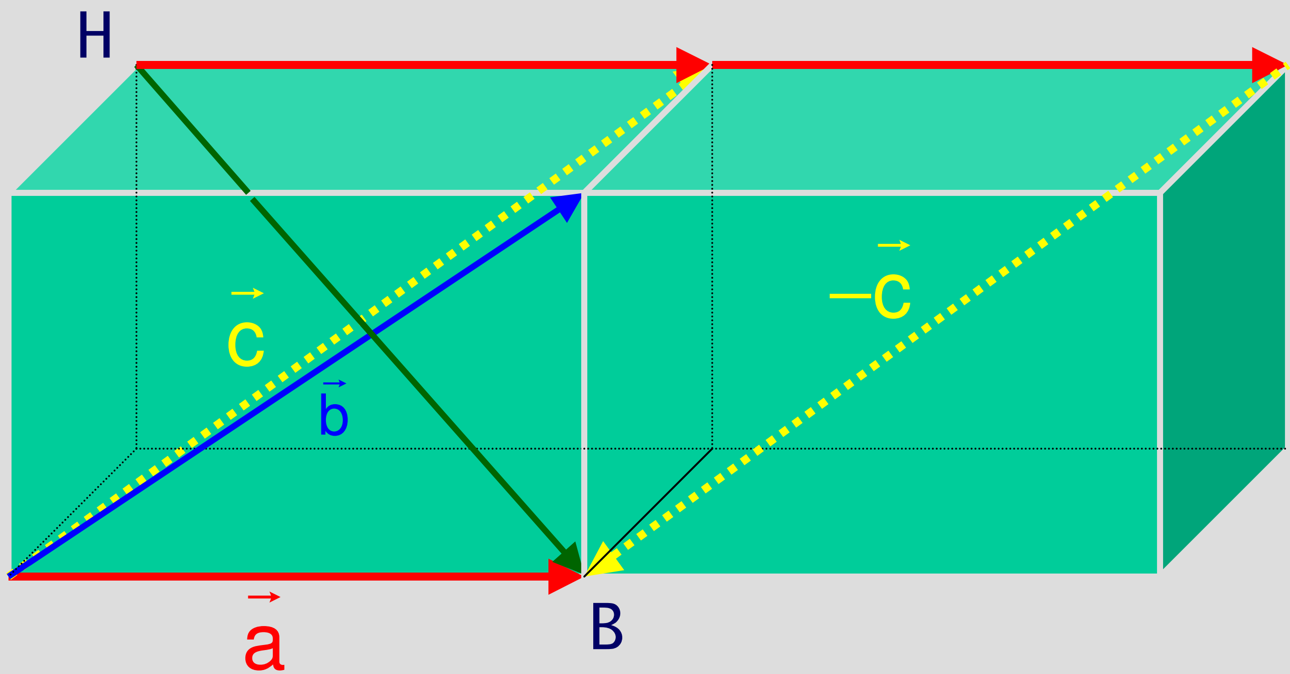
$$\overrightarrow{GE} = \overrightarrow{GF} + \overrightarrow{FE} =$$

$$\vec{b} - \vec{c} + (-\vec{a}) = -\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$$

$$\overrightarrow{HB} = \overrightarrow{HG} + \overrightarrow{GF} + \overrightarrow{FB} =$$

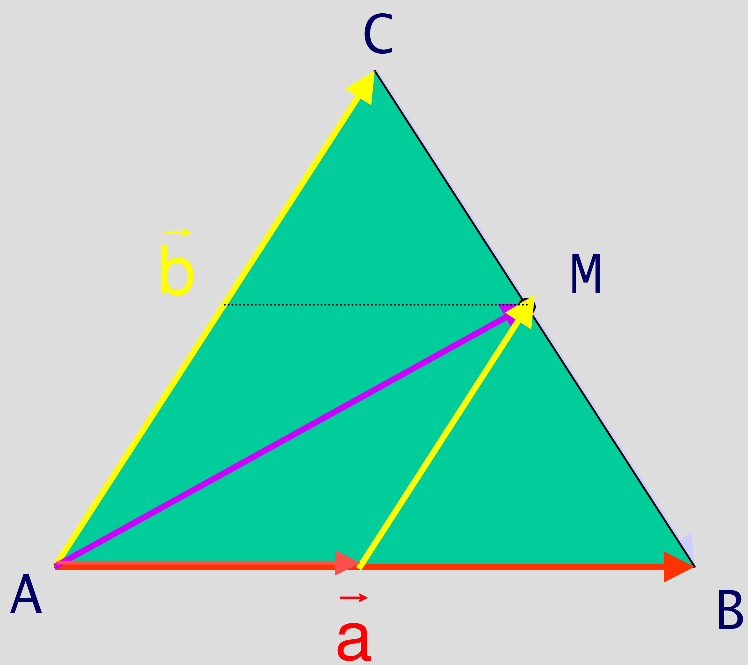
$$\vec{a} + (\vec{b} - \vec{c}) + (\vec{a} - \vec{b}) = 2 \cdot \vec{a} + (-\vec{c}) = 2 \cdot \vec{a} - \vec{c}$$

Mit etwas Übung kann man das Ergebnis direkt sehen :



$$\overrightarrow{HB} = 2 \cdot \vec{a} - \vec{c}$$

Drücke den Vektor $\overrightarrow{CB}$ bzw. $\overrightarrow{AM}$ als Summe mit den Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ aus:

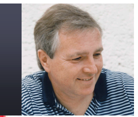


$$\overrightarrow{CB} = \vec{a} - \vec{b}$$

$$\overrightarrow{AM} = \vec{b} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$$

$$= \vec{b} + \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b})$$

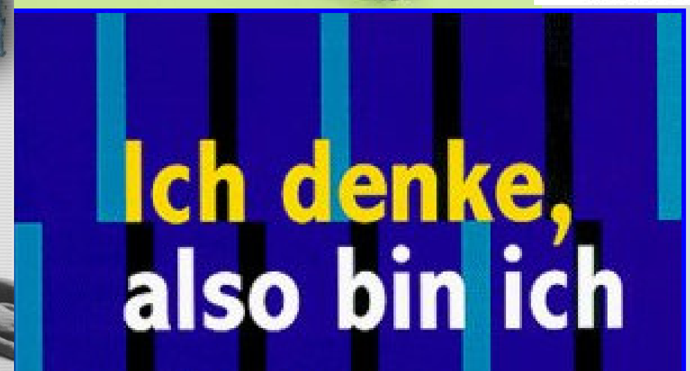
$$= \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$$




Think different.


Think
IBM


Think
Think Parade 2005


Ich denke,
also bin ich


DINK
思維
TÆNK
DENK
THINK
AJATTELE
RÉFLÉCHISSEZ
DENK
सोचिए
RIFLETTET
TENK
PENS


THINK