Trainingsaufgabe Analysis 05

Gegeben ist die Funktionenschar $f_k(x) = (k^2x + k)e^{-kx}$ $mit\ k \in \mathbb{R}^+$ und $x \in \mathbb{R}$

5.1 Bestimme die Schnittpunkte des Graphen G_{f_k} mit den Koordinatenachsen

und untersuche das Verhalten von f_k für $x \to \pm\infty$

5.2 Bestimme den Extrempunkt des Graphen G_{f_k}. Zur Kontrolle: $f'_k(x) = -k^3xe^{-kx}$

5.3 Zeige, dass f_k genau einen Wendepunkt W_k besitzt und bestimme die Gleichung der Wendetangente t_k. Leite eine Gleichung für den Funktionsgraphen her, auf dem alle Wendepunkte der Scharkurven liegen.

5.4 Bestimme die Funktionswerte f_1 (-1.5); f_1 (1,6) und f_1 (4) . Zeichne unter Berücksichtigung aller bisherigen Ergebnisse den Graphen zu f_1 mitsamt der Wendetangente t_1 in ein Koordinatensystem im Bereich $x \in [-1,5;4]$.
Längeneinheit auf den Achsen : 2cm

5.5 Durch $F_1(x) = (ax + b)e^{-x}$ ist eine Stammfunktion zu f_1 gegeben. Bestimme a und b

5.6 Der Graph G_{f_1} und die Koordinatenachsen begrenzen im ersten Quadranten ein Flächenstück, das bis ins Unendliche reicht. Zeige, dass dieses Flächenstück einen endlichen Flächeninhalt besitzt.

5.7 Begründe, das die Einschränkung der Funktion f_1 auf $x \in \mathbb{R}^+$ eine Umkehrfunktion h besitzt. Die Funktionsgleichung zu h muss nicht hergeleitet werden !

a) Gib den Definitionsbereich und den Wertebereich von h an.
b) An welcher Stelle besitzt h eine Wendestelle?
c) Bestimme $h'\left(\frac{2}{e}\right)$

Lösung:

$f_k(x) = (k^2x + k)e^{-kx} \qquad k \in \mathbb{R}^+ \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R}$

1. x-Achse: $(k^2x + k)e^{-kx} = 0 \quad k^2x + k = 0 \quad x = -\frac{1}{k} \qquad N\left(-\frac{1}{k}\middle|0\right)$

y-Achse: $f(0) = k \cdot e^{-0} = k \qquad (0|k)$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = "+\infty \cdot 0^+" = \lim_{x\to+\infty} \frac{k^2x + k}{e^{kx}} = "\frac{+\infty}{+\infty}" \overset{l'H.}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{k^2}{ke^{kx}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{k}{e^{kx}} = 0^+$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = "-\infty \cdot (+\infty)" = -\infty$$

2. $$f'(x) = \frac{k^2 \cdot e^{kx} - (k^2x + k)ke^{kx}}{(e^{kx})^2} = \frac{k^2 - k^3x - k^2}{e^{kx}} = -k^3xe^{-kx}$$

$$f''(x) = \frac{-k^3e^{kx} + k^3x \cdot ke^{kx}}{(e^{kx})^2} = \frac{-k^3 + k^4x}{e^{kx}}$$

$f'(x) = 0 \qquad -k^3x = 0 \qquad x = 0$

$f''(0) = -\frac{k^3}{e^0} < 0 \qquad H(0|k)$

3. $f''(x) = 0 \qquad k^4x - k^3 = 0 \qquad x = \frac{1}{k}$

wegen $e^{-kx} > 0$ in $\mathbb{R}$ und $k > 0$ gilt:

$f''(x) < 0$ für $x < \frac{1}{k}$ und $f''(x) > 0$ für $x > \frac{1}{k}$

$W\left(\frac{1}{k}\middle|\frac{2k}{e}\right)$

Wendetangente: $f'\left(\frac{1}{k}\right) = -k^2e^{-1} = -\frac{k^2}{4}$

$$y = -\frac{k^2}{e}x + b$$

$$\frac{2k}{e} = -\frac{k^2}{e}\cdot\frac{1}{k} + b \quad \Rightarrow \quad b = \frac{3k}{e}$$

$$y = -\frac{k^2}{e}x + \frac{3k}{e}$$

$$ey = -k^2x + 3k \qquad ey = k(3-kx)$$

$$f'''(x) = k^4\cdot e^{-kx} + (-k^3 + k^4x)(-ke^{-kx})$$

$$= \frac{k^4 + k^4 - k^5x}{e^{kx}} = \frac{2k^4 - k^5x}{e^{kx}}$$

$f'''\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{k^4}{e} > 0$ da $k>0$

C: $x = \frac{1}{k} \quad \Rightarrow k = \frac{1}{x}$

$$y = \frac{2k}{e} = \frac{2\cdot\frac{1}{x}}{e} = \frac{2}{ex}$$

4 $f_1(x) = (x+1)e^{-x}$

NSt$(-1|0)$

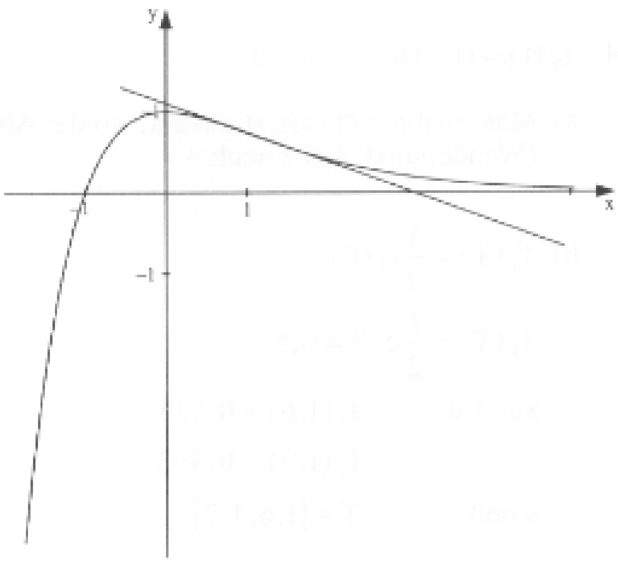
$W\left(1\middle|\frac{2}{e}\right)$

t_1: $y = -\frac{1}{e}x + \frac{3}{e}$

$f_1(1{,}6) \approx 0{,}525$

$f_1(-1{,}5) \approx -2{,}241$

$f_1(4) \approx 0{,}092$



5 $F(x) = (ax + b)e^{-x}$

$$F'(x) = \frac{a \cdot e^x - (ax+b)e^x}{(e^x)^2} = \frac{a - ax - b}{e^x} = (-ax + a - b)e^{-x}$$

$F'(x) = f_1(x)$ Koeffizientenvergleich: $-a = 1$ $a - b = 1$

also: $a = -1$ $b = -2$

$F(x) = (-x - 2)e^{-x}$

6 $$A = \lim_{a\to\infty} \int_0^a f_1(x)dx = \lim_{a\to\infty}\left[(-x-2)e^{-x}\right]_0^a = \lim_{a\to\infty}\left[(-a-2)e^{-a} + 2e^0\right]$$

$$= \lim_{a\to\infty}\left(-\frac{a+2}{e^a} + 2\right) \overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{a\to\infty}\left(-\frac{1}{e^a} + 2\right) = 0 + 2 = 2$$

$f_1'(x) < 0$ in $\mathbb{R}^+$ $\Rightarrow$ $f_1(x)$ streng monoton fallend in $\mathbb{R}^+$ $\Rightarrow$ umkehrbar

$\mathbb{D}_{f_1} = \mathbb{R}^+$ $\quad W_{f_1} =]0;1[$

$W_h = \mathbb{R}^+$ $\quad \mathbb{D}_h =]0;1[$

f'(x) besitzt ein lokales Extremum für $x = 1$ (Wendepunkt), also besitzt h'(x) ein lokales Extremum für $x = \frac{2}{e}$

$$h'\left(\frac{2}{e}\right) = \frac{1}{f'_1(1)} = \frac{1}{-e^{-1}} = -e$$

Bem.: Das Integral der Funktion f_k hätte man auch elementar bestimmen können:

$$\int (k^2x + k)e^{-kx} = k\int (kx+1)e^{-kx}dx$$

$$\int \underbrace{(kx+1)}_{u}\underbrace{e^{-kx}}_{v'}dx = (kx+1)\cdot\frac{1}{-k}e^{-kx} - \int k\frac{1}{-k}e^{-kx}dx$$

$$= \frac{1}{-k}(kx+1)\cdot e^{-kx} + \frac{1}{-k}e^{-kx}$$

$$= \frac{1}{-k}e^{-kx}\left[(kx+2)\right]$$

$k = 1$: $\int (x+1)e^{-x}dx = e^{-kx}(-x-2)$