Aufgabe Analysis AN07

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \ln\frac{-1}{1+x}$

7.1 Ermitteln Sie den maximalen Definitionsbereiche D_f und die Nullstelle(n) der Funktionen f . Analysieren Sie das Verhalten von f an den Rändern von D_f

7.2 Untersuchen Sie das Monotonieverhalten von f

7.3 Zeigen Sie, dass f eine Umkehrfunktion $\overline{f}$ besitzt. Bestimmen Sie den Definitionsbereich und die Funktionsgleichung von $\overline{f}$.

7.4 Skizzieren Sie die Graphen zu f und $\overline{f}$ unter Verwendung aller bisheriger Ergebnisse in ein gemeinsames Koordinatensystem (Zeichnen Sie insbesondere alle Asymptoten und die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen ein!)

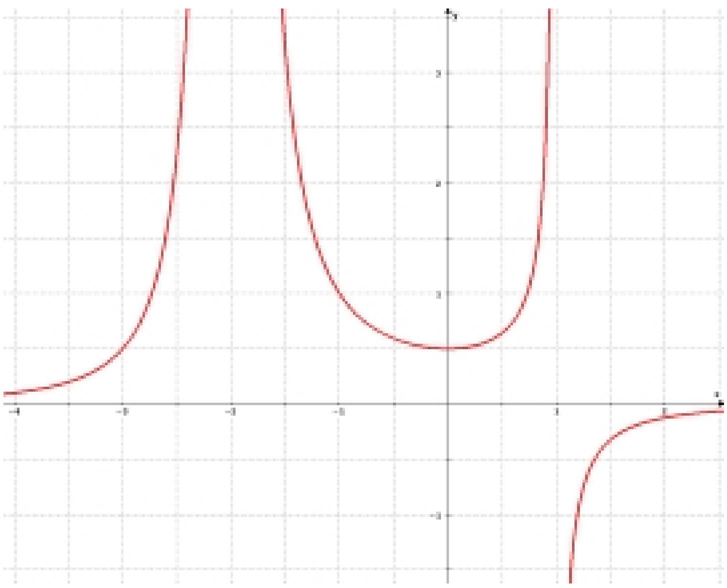
7.5 Der Graph G_f , die x-Achse und die Gerade mit der Gleichung $x = -1$ schließen im zweiten Quadranten ein bis ins unendlich erstreckte Fläche ein. Zeigen Sie, dass diese Fläche eine endliche Flächenmaßzahl besitzt.

7.6 Es sei g eine in ganz $\mathbb{R}$ differenzierbare Funktion mit dem Graphen G_g. Die Abbildung zeigt den Graphen G_u der in $\mathbb{R} \setminus \{-2; 1\}$ definierten Funktion u mit

$u(x) = \frac{1}{g(x)}$

Die x-Achse und die Geraden mit x=-2 und x=1 sind Asymptoten dieses Graphen.

Zur Bearbeitung der folgenden Aufgaben können Werte aus der Abbildung näherungsweise abgelesen werden.

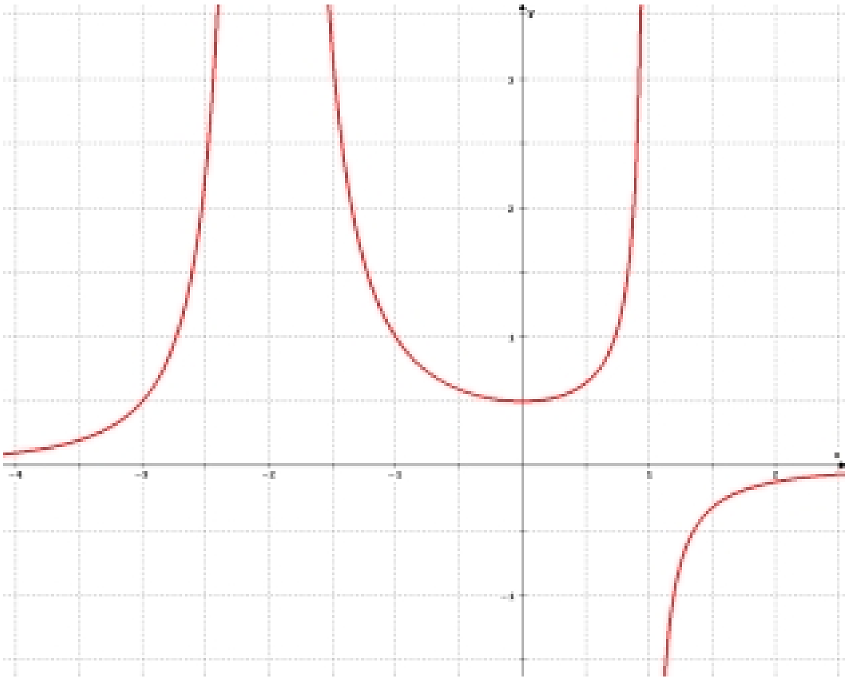


a) Geben Sie die Nullstellen von g an. Geben Sie die Koordinaten der Schnittpunkte von

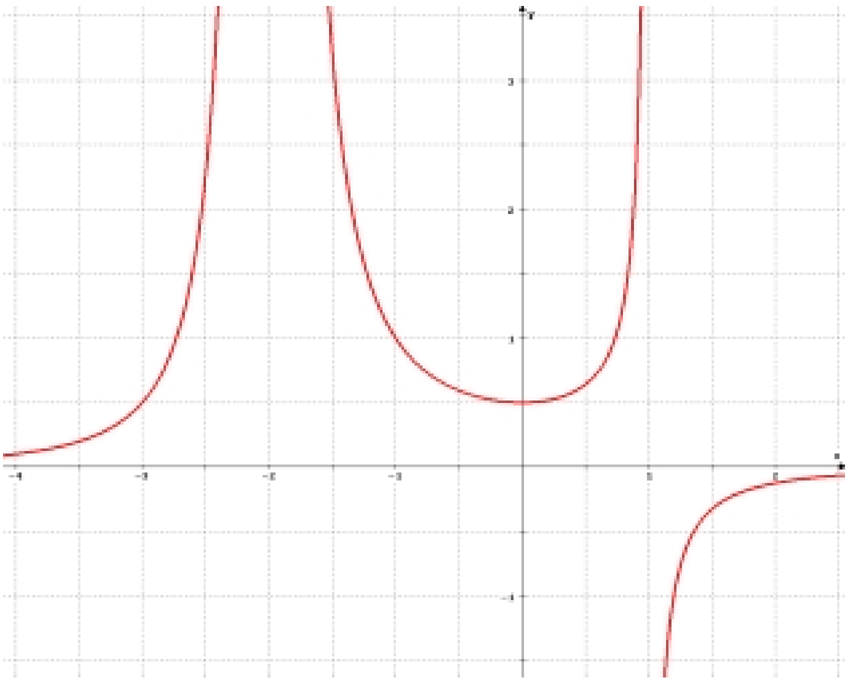
G_g und G_u an

b) Begründen Sie, dass $g'(-2) = 0$ und $g'(0) = 0$ gilt.

c) Zeigen Sie, dass für alle Schnittpunkte von G_g mit G_u gilt: $g'(x) = -u'(x)$
Ermitteln Sie $g'(-1)$ indem Sie $u'(-1)$ möglichst genau aus der Zeichnung ablesen.



d) Geben Sie g(0) an. Skizzieren Sie dann den Graphen G_g in das folgende Diagramm



Lösung AN07 1/5

7.1) $f(x) = \ln\frac{-1}{1+x}$ $\quad 1+x \neq 0 \;\wedge\; \frac{-1}{1+x} > 0$

$x \neq -1 \qquad 1+x < 0$

$x < -1$

$\Rightarrow D_f =]-\infty; -1[$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-1}{1+x} = 1$$
$$\Leftrightarrow 1+x = -1$$
$$\Leftrightarrow x = -2 \qquad N(-2|0)$$

$$x \to -\infty \Rightarrow 1+x \to -\infty \Rightarrow \frac{-1}{1+x} \to 0+$$
$$\Rightarrow \ln\left(\frac{-1}{1+x}\right) \to -\infty$$

d.h. $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln\frac{-1}{1+x} = -\infty$

$$x \to -1- \Rightarrow 1+x \to 0- \Rightarrow \frac{-1}{1+x} \to \infty$$
$$\Rightarrow \ln\left(\frac{-1}{1+x}\right) \to \infty$$

d.h. $\lim\limits_{x\to-1-} \ln\left(\frac{-1}{1+x}\right) = \infty$

7.2) $f'(x) = \dfrac{1}{\frac{-1}{1+x}} \cdot \dfrac{-(-1)\cdot 1}{(1+x)^2} = \dfrac{1+x}{-1} \cdot \dfrac{1}{(1+x)^2}$

$= \dfrac{-1}{\underbrace{1+x}_{<0}} > 0$ d.h. f ist in $]-\infty; -1[$ str. mon. steigend

2/5

7.3) Wegen der Monotonie ist f in $]-\infty,-1[$ umkehrbar!

Wegen $\mathbb{W}_f =]-\infty,\infty[= \mathbb{R}$ gilt:

$$\mathbb{D}_{\bar f} = \mathbb{R} \qquad \mathbb{W}_{\bar f} =]-\infty,-1[$$

$$f(x) = y = \ln \frac{-1}{1+x}$$

$$e^y = \frac{-1}{1+x} \quad \Big|\cdot(1+x)$$

$$e^y + x\cdot e^y = -1$$

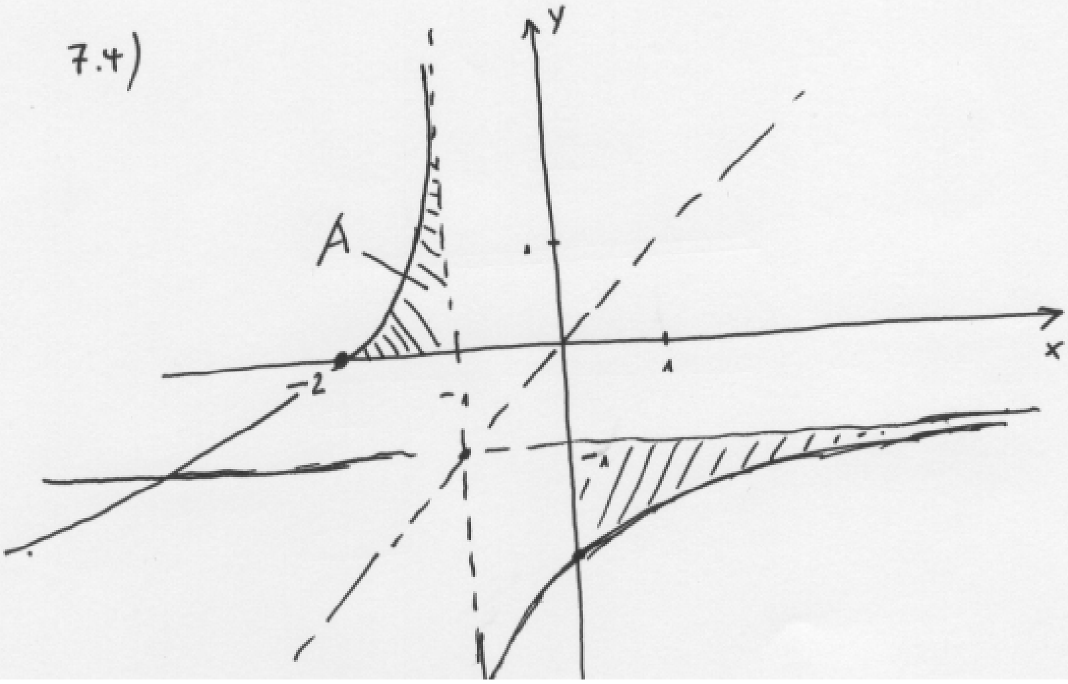
$$x\cdot e^y = -1 - e^y$$

$$x = -\frac{1+e^y}{e^y} = -(e^{-y}+1) = -1 - e^{-y}$$

$$x \leftrightarrow y: \quad y = -e^{-x} - 1$$

$$\bar f(x) = -e^{-x} - 1$$

7.4)



3/5

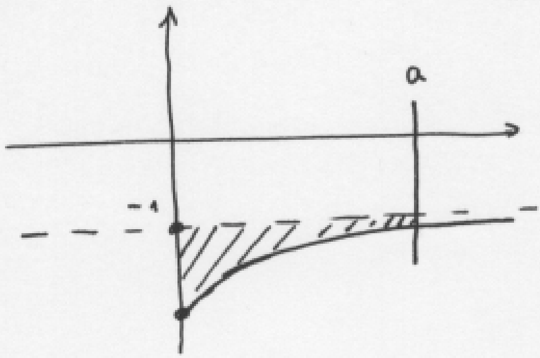
7.5 $\tilde{A} = \lim\limits_{a\to\infty} \int_0^a \left(\bar{f}(x) + 1\right) dx$

$= \lim\limits_{a\to\infty} \int_0^a \left(-e^{-x} - 1 + 1\right) dx$

$= \lim\limits_{a\to\infty} \left[+e^{-x}\right]_0^a$

$= \lim\limits_{a\to\infty} e^{-a} - 1$

$= -1$ $\Rightarrow$ $\underline{\underline{A = |-1| = 1}}$!



7.6. $u(x) = \dfrac{1}{g(x)}$

a) Da u an den Stellen $x = -2$ und $x = 1$ Polstellen hat, gilt

$\underline{\underline{g(-2) = g(1) = 0}}$

Da $u(x)$ an der Stelle $x = -2$ keinen Vorzeichenwechsel hat ist -2 eine doppelte Nullstelle von g und 1 eine einfache Nullstelle.

$u(x) = \dfrac{1}{g(x)}$ und $g(x) = u(x)$ $\Rightarrow$ $u(x) = \dfrac{1}{u(x)}$

$\Rightarrow (u(x))^2 = 1 \Rightarrow \boxed{u(x) = \pm 1}$

$u(x) = 1$ falls $x_1 \approx -2{,}75$ $x_2 \approx -1$ $x_3 \approx 0{,}75$

$u(x) = -1$ " $x_4 \approx 1{,}2$

b) Ich versuche die Funktion g zu bestimmen

$$g(x) = c \cdot \underset{\text{doppelte NST}}{(x+2)^2} \cdot \underset{\text{einfache NST}}{(x-1)}$$

$$u(x) = \frac{1}{c \cdot (x+2)^2 \cdot (x-1)}$$

$$u(0) = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{c \cdot 4 \cdot (-1)} \Rightarrow 2 = -4c \Rightarrow c = -\frac{1}{2}$$

$$u(x) = \frac{1}{-\frac{1}{2}(x+2)^2(x-1)}$$

also $g(x) = -\frac{1}{2}(x+2)^2(x-1)$

$$= -\frac{1}{2}(x^2+4x+4)(x-1)$$

$$= -\frac{1}{2}(x^3+3x^2-4)$$

$$g'(x) = -\frac{3}{2}x^2 - 3x$$

$$\boxed{\begin{array}{l} g'(-2) = -6+6 = 0 \\ g'(0) = 0 \end{array}}$$

5/5

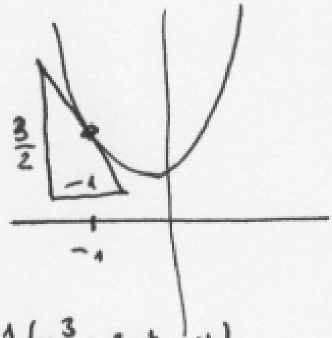
c) Schnittpunkte : $u(x) = \pm 1$

$$u'(x) = \frac{-g'(x)}{[g(x)]^2} = -g'(x) \cdot \underbrace{[u(x)]^2}_{=1}$$

$$\Rightarrow u'(x) = -g'(x) \quad \text{bzw.} \quad g'(x) = -u'(x)$$

abgelesen (Steigungsdreieck):

$$u'(-1) = -\frac{3}{2}$$



d) $g(0) = \frac{4}{2} = 2$ mit $g(x) = -\frac{1}{2}(x^3 + 3x^2 - 4)$

oder $u(x) = \frac{1}{g(x)} \Rightarrow g(0) = \frac{1}{u(0)} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$