**Lösung WS01**

1.1.1 $S=\{(1|1|1|1)....(4|4|4|4)\} \quad \#S=4^4=256$

1.1.2 a) 3 gleiche Ziffern

-4 Möglichkeiten die Ziffer für die 3 gleichen auszuwählen

- $\binom{4}{3}=4$ Möglichkeiten diese 3 gleichen Ziffern auf 4 Plätze zu verteilen.

- 3 Möglichkeiten die restliche Zahl auszuwählen

$\Rightarrow N_3=4\cdot4\cdot3=48$

b) 4 gleiche Ziffern

4 Möglichkeiten die Ziffer für die 4 gleichen auszuwählen

$\Rightarrow N_4=4$

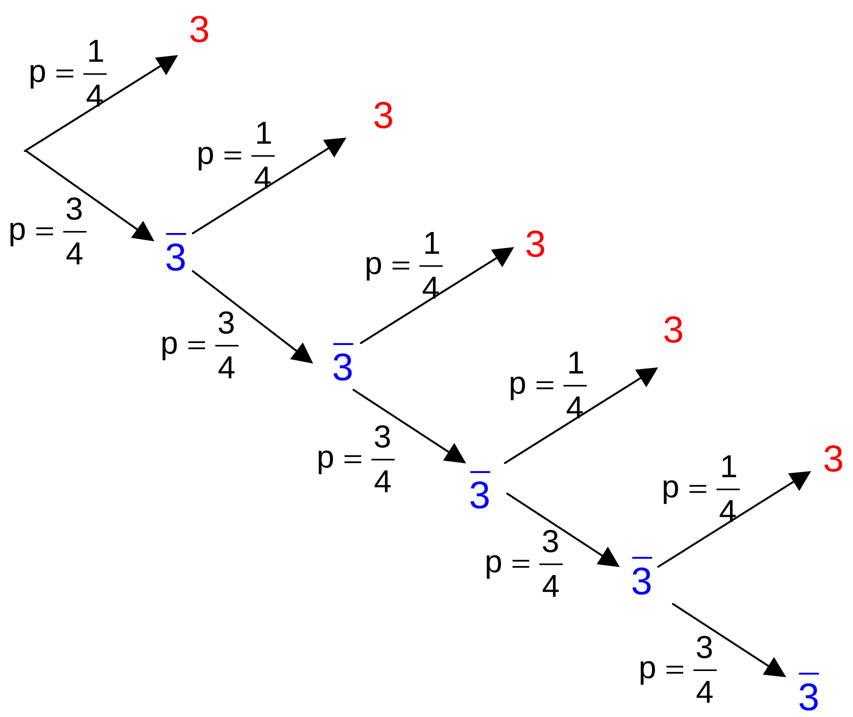
Also insgesamt N=48+4=52 Zahlen mit mindestens 3 gleichen Ziffern.

1.1.3 Die Wahrscheinlichkeit für irgendeine Zahl mit 4 versch. Ziffern ist nach der Pfadregel P=$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{288}$

Da es insgesamt 4!=24 verschiedene Zahlen mit 4 versch. Ziffern gibt, ist

$P(\text{Zahl hat 4 verschiedene Ziffern})=24\cdot\frac{1}{288}=\frac{1}{12}$

1.2.1 Y = Anz. der Würfe bis Spielende




| k | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| P(Y=k) | $\frac{1}{4}$ | $\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}$ | $\left(\frac{3}{4}\right)^2\cdot\frac{1}{4}$ | $\left(\frac{3}{4}\right)^3\cdot\frac{1}{4}$ | $\left(\frac{3}{4}\right)^4\cdot\frac{1}{4}+\left(\frac{3}{4}\right)^5$ |
| | 25% | 18,75% | 14% | 10,54% | 31,64% |

1.2.3 $P(Y\leq 3)=P(Y=1)+P(Y=2)+P(Y=3)=$ 57,75%

1.2.4 E(Y)= $\sum k\cdot P(Y=k)\approx 3{,}06$

1.3.1 X: gewürfelte Augenzahl G : Reingewinn

| k | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| P(X=k) | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{6}$ |

$$E(X)= \sum k \cdot P(X=k) = \frac{1}{4} + 2\cdot\frac{1}{3} + 3\cdot\frac{1}{4} + 4\cdot\frac{1}{6} = \frac{54}{24} = 2\frac{1}{3}$$

Die mittlere Augenzahl pro Wurf beträgt $2\frac{1}{3} \approx 2{,}33$.

1.3.2

| k | -3 | -1 | 1 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| P(G=k) | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{6}$ |

1.3.3 $E(G)= \sum k \cdot P(G=k) = -\frac{3}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{3}$

Pro Spiel verliert man im Mittel $\frac{1}{3}€ \approx 0{,}33€$

alternativ kann man das Ergebnis aus 1.3.1 verwenden:

$$E(G)= -5€ + 2\frac{1}{3}€ = -\frac{1}{3}€ \approx -0{,}33€$$

1.3.4 Fairer Einsatz : $5€ - \frac{1}{3}€ \approx 4{,}66€$ dann wäre E(G)=0

1.3.5 X: Anzahl der Spiele mit erzieltem Reingewinn

n-stufiges Bernoulli-Experiment ; Erfolg: Spiel mit Reingewinn

$$p = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12} \qquad q = \frac{7}{12}$$

$$P(X \geq 1) \geq 0,99$$

$$1 - P(X = 0) \geq 0,99$$

$$1 - 0,99 \geq P(X = 0)$$

$$0,01 \geq \binom{n}{0} \cdot \left(\frac{5}{12}\right)^0 \cdot \left(\frac{7}{12}\right)^n$$

$$0,01 \geq \left(\frac{7}{12}\right)^n \quad |\log$$

$$\log 0,01 \geq n \cdot \log\frac{7}{12} \quad |:\log\frac{7}{12} \qquad \text{Vorsicht : } \log\frac{7}{12} < 0$$

$$\frac{\log 0,01}{\log\frac{7}{12}} \leq n$$

$$8,5.. \leq n$$

Man muss also mindestens 9 mal spielen, damit man mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99% mindestens einmal einen positiven Reingewinn erzielt.

1.4 n=100 Erfolg: man würfelt eine 3 p=0,25 q=0,75

X: gewürfelte Augenzahl

1.4.1 $P(X = 33) = \binom{100}{33} \cdot 0,25^{33} \cdot 0,75^{67} \approx 0,0170$ aus Tabelle abgelesen.

| Binomialverteilungen | | | | kumuliert | | n= 100 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| p= k<= | 0,1 | 0,2 | 0,25 | 0,3 | 0,33 | 0,4 | 0,5 |
| 32 | 1,000 | 0,998 | 0,955 | 0,711 | 0,462 | 0,062 | 0,000 |
| 33 | 1,000 | 0,999 | 0,972 | 0,779 | 0,547 | 0,091 | 0,000 |
| 24 | 1,000 | 0,869 | 0,462 | 0,114 | 0,033 | 0,001 | 0,000 |

$$P(X=33)=P(X\leq 33)-P(X\leq 32)$$
=0,972-0,955=0,017=1,7%

1.4.2 $$P(25\leq X\leq 33)=P(X\leq 33)-P(X\leq 24)$$
=0,972-0,462 =0,510=51%

1.5 Nullhypothese $H_0$ : $p=\frac{1}{3}\approx 0{,}333..$ für das Auftretender 2

n=100 $p=\frac{1}{3}$ Erfolg: 2 ist aufgetreten $q=\frac{5}{6}$
X: gewürfelte Augenzahl

E(X)=np $\approx 33$ $\sigma=\sqrt{npq}=\sqrt{22}\approx 4{,}7$

$U_{95\%}=[24;42]_{\mathbb{N}}$

1.5.1 Ich verwerfe die Hypothese falls weniger als 24 mal oder mehr als 42 mal die 2 auftritt.

1.5.2 Die Hypothese $H_0$ wird also nicht verworfen (d.h. sie wird beibehalten), weil $36\in[24;42]_{\mathbb{N}}$ (Irrtumswahrscheinlichkeit 5%)

Das heißt aber nicht, dass die Hypothese $H_0$ richtig ist. Das Ergebnis ist z.B. auch verträglich mit der Hypothese $H_1$: p=0,39

E(X)=np $=39$ $\sigma=\sqrt{npq}=\sqrt{23{,}04}\approx 4{,}88$

$U_{95\%}=[35;43]_{\mathbb{N}}$ $36\in[35;43]_{\mathbb{N}}$

1.5.3 $23 \notin [24;42]_{\mathbb{N}}$ d.h. ich verwerfe die Hypothese. Ich bin mir bewusst, dass ich dabei eine Irrtumswahrscheinlichkeit von 5% habe. Auch bei p=$\frac{1}{3}$ kommen in 5% der Fälle Ergebnisse außerhalb der 95%-Umgebung vor. In diesem Fall würde ich die Hypothese zu unrecht verwerfen.