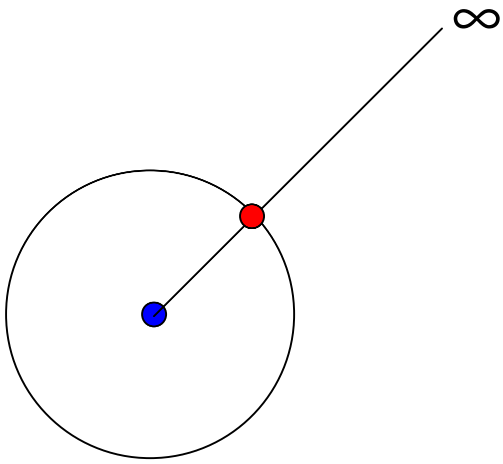
Metzler (altes Buch)

Im Wasserstoffatom hat das Elektron ($Q_e = -1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C) einen Abstand von etwa 10^{-10} m vom Proton ($Q_P = +1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C). Wird das Elektron aus dem Anziehungsbereich des Protons (ins Unendliche) entfernt, so sagt man, das Wasserstoffatom wird ionisiert. Berechnen Sie die dafür erforderliche Ionisierungsenergie.



Lösung:

$$W = e \cdot (\varphi(\infty) - \varphi(r_1)) = -e \cdot \left(0 - \frac{e}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r_1}\right)$$

$$= \frac{e^2}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r_1} = \frac{1{,}6^2 \cdot 10^{-38} \,(\mathrm{As})^2}{4\pi \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \,\frac{\mathrm{As}}{\mathrm{Vm}}} \cdot \frac{1}{10^{-10}\,\mathrm{m}}$$

$$\approx 2{,}36 \cdot 10^{-18}\,\mathrm{J} \approx 14{,}7\,\mathrm{eV}$$

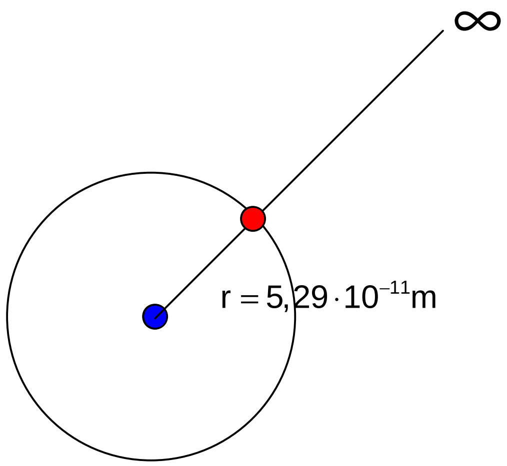
$$1\,\mathrm{eV} = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{As} \cdot 1\,\mathrm{V} = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{As} \cdot 1\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{As}} = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}$$

Hinweis: Das ist die Energie, die notwendig ist, um ein <u>ruhendes</u> Elektron mit dem Anfangsabstand r_1 ins Unendliche zu transportieren. Das ist aber nicht die echte Ionisierungsenergie!

Hat das Elektron dagegen schon eine kinetische Energie auf seiner Bahn, dann sieht die Betrachtung der anders aus:

Metzler 4. Auflage 2007, S. 228 A8

Im sogenannten Bohr'schen Modell des Wasserstoffatoms kreist ein Elektron der Masse $m = 9{,}11 \cdot 10^{-31}\,\text{kg}$ und der Ladung $q = -e = -1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\text{As}$ im Abstand $r = 5{,}29 \cdot 10^{-11}\,\text{m}$ um den die Ladung Q = + *e* tragenden Atomkern.
a) Bestimmen Sie das Potential, das der Kern am Ort des Elektrons erzeugt, und die potentielle Energie des Atoms, wenn sich das Elektron auf der Kreisbahn befindet.
b) Berechnen Sie die kinetische Energie des Elektrons auf der Kreisbahn.
c) Berechnen Sie die Energie, die erforderlich ist, um das Atom zu ionisieren, d.h. um das Elektron ins Unendliche zu bringen.
Geben Sie alle Energien in der Einheit eV an.



a)

$$\varphi(r_1) = -\frac{e}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r_1}$$

$$= -\frac{1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\text{As}}{4\pi \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\frac{\text{As}}{\text{Vm}}} \cdot \frac{1}{5{,}29 \cdot 10^{-11}\,\text{m}}$$

$$\approx -27{,}2\ \text{V}$$

Die potenzielle Energie des Elektrons auf der Bahn mit dem Radius r_1 ist damit:

$$W_{pot}(r_1) = e \cdot \varphi(r_1) = -\frac{e^2}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r_1} = -27{,}2\ \text{eV}$$

b) Gleichförmige Kreisbewegung: $F_Z = F_{Coulomb}$

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r^2} \Rightarrow mv^2 = \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r}$$

$$E_{kin} = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{8\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r} = -\frac{1}{2} W_{pot} = 13{,}6\ \text{eV}$$

$$1\text{eV} = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\text{As} \cdot 1\text{V} = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\text{As} \cdot 1\frac{\text{J}}{\text{As}} = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\text{J}$$

c) Um ein Atom zu ionisieren, muss man das Elektron ins Unendliche transportieren. Dabei soll gelten:

$$W_{gesamt}(\infty) = 0 \quad \text{d.h.} \quad W_{pot}(\infty) = 0 \quad \text{und} \quad W_{kin}(\infty) = 0$$

Für die Ionisierungsenergie gilt dann

$$W_{ion} = W_{gesamt}(\infty) - W_{gesamt}(r_1) = 0 - (-27{,}2\,eV + 13{,}6\,eV)$$
$$= 13{,}6 \text{ eV}$$

Metzler 4. Auflage 2007, S. 228 A9

Zwei kleine Metallkugeln mit den Massen m, = 5 g und m_2 = 10 g, die von einem masselosen Faden in einem Abstand r = 1 m voneinander gehalten werden, tragen beide die positive Ladung $q = 5 * 10^{-6}$ As.

a) Berechnen Sie die potentielle Energie dieses Systems.
b) Bestimmen Sie die Beschleunigung der Kugeln im Augenblick ihrer Trennung.
c) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit beider Kugeln, wenn sich beide in sehr großer Entfernung voneinander befinden.

Hinweis: Energie- und Impulserhaltungssatz

Lösung:

m_1=5g q_1=5*10^{-8}C m_2=10g q_2=5*10^{-8}C

Die Gravitationskraft kann gegenüber der Coulombkraft vernachlässigt werden.

a)
$$W_{pot} = \int_\infty^r \vec{F}(r)d\vec{r} = \int_\infty^r F(r)dr \cdot \cos(180°) = -\int_\infty^r F(r)dr$$

$$= -\frac{q^2}{4\pi\cdot\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_\infty^r = \cdot\frac{1}{r} = \frac{25\cdot10^{-16}}{4\pi\cdot 8{,}85\cdot10^{-12}\cdot 1}\,\frac{(As)^2Nm}{(As)^2m} = 0{,}225J$$

b) $$F_{12} = F_{21} = \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{q^2}{1^2} = \frac{W}{r} = 0{,}225\ \text{N}$$

Wird der Faden durchtrennt, dann erfahren die beiden Kugeln eine Beschleunigung

$$a_1 = \frac{F_{21}}{m_1} = \frac{0{,}225\text{N}}{0{,}005\text{kg}} = 45\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \qquad a_1 = \frac{F_{12}}{m_2} = \frac{0{,}225\text{N}}{0{,}01\text{kg}} = 22{,}5\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

c) Energieerhaltungssatz : W_{ges} (t=0)= W_{ges} (t)
Impulserhaltungssatz : $\vec{P}_{ges}(t=0) = \vec{P}_{ges}(t)$

In sehr großer Entfernung ($r \to \infty$ d.h. $t \to \infty$) gilt:

W_{ges} (t=0)= W_{pot}(t=0)=0,225J

$$W_{ges}(t=\infty) = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2$$

$$m_1\overrightarrow{v_1} + m_2\overrightarrow{v_2} = \vec{0}$$

$$\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2\frac{m_1^2}{m_2^2}v_1^2 = W_{pot}(t=0)$$

$$v_1^2 \cdot \frac{m_1 m_2 + m_1^2}{m_2} = 2 \cdot W_{pot}(t=0)$$

$$\Rightarrow V_1 = 7{,}75\frac{\text{m}}{\text{s}} \qquad V_2 = 3{,}88\frac{\text{m}}{\text{s}}$$